PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 14 — 15. Juli 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 16 am 10. August 1928 — 29. Jahrgang

INHALT:

Originalmitteilungen:

O. Pfetscher, Über die Erregung sehr schneller elektrischer Schwingungen in der Dreielektrodenröhre. S. 449.

F. Schindelhauer, Radioaktive Niederschläge auf Hochantennen. S. 479.

L. Prandtl, Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr. S. 487.

R. Seeliger, Bemerkung zur Theorie der Stromleitung in festen Isolatoren. S. 489.

H. Petersen, Über die Hypothese, daß die höchsten Atmosphärenschichten durch β-Strahlen erwärmt werden. S. 492.

W. Anderson, Erwiderung auf den letzten Artikel von Herrn H. Petersen. S. 492.

Besprechungen:

F. Weigert, Optische Methoden der Chemie. S. 493.

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Herausgegeben von Th. v. Kármán. Heft 4. S. 494.

E. Marcus, Die Zeit- und Raumlehre Kants in Anwendung auf Mathematik und Naturwissenschaft. S. 494.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. 2 Bände. S. 495.

L. Heffter u. C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd. 2. Aufl. S. 495.

R. Lehnhardt, Der Detektor und seine Anwendung für Empfang, Verstärkung und Erzeugung elektrischer Wellen. S. 495.

C. Lübben, Die Antenne und ihre Verwendung in der Radiotechnik. S. 496.

M. Singelmann, Störbefreiung in der drahtlosen Nachrichtenübermittlung. S. 496.

J. M. Kolthoff, Die Maßanalyse. 1. 2 Bände. S. 496.

Personalien. S. 496.

Gesuche. S. 496.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Erregung sehr schneller elektrischer Schwingungen in der Dreielektrodenröhre.

Von O. Pfetscher.

I. Einleitung.

(Problemstellung. — Vereinfachende Annahmen. — Grundgedanke der Theorie.)

Das Bestreben, die übliche Methode zur Erzeugung ungedämpfter elektrischer Wellen mit Hilfe der Elektronenröhre zu übertragen auf das Gebiet kurzer Hertzscher Wellen, stößt auf zwei wesentliche Hindernisse:

1. Die Eigenkapazität der Röhre (d. h. ihrer Elektrodenanordnung) läßt sich nur beschränkt und auf Kosten ihrer Belastbarkeit herabsetzen*).

2. Die endliche Flugzeit der Elektronen zwischen den einzelnen Elektroden bewirkt zwischen den Spannungsschwankungen der letzteren und den Stromänderungen im allgemeinen einen Phasenunterschied. Die aus dem statischen Kennlinienfeld der Röhre gezogenen Schlüsse auf die Schwingfähigkeit verlieren damit ihre Gültigkeit.

Noch bevor man sich theoretisch mit dieser letzteren Komplikation beschäftigt hatte, brachte die Entdeckung von H. Barkhausen und K. Kurz[1]) den experimentellen Nachweis dafür, daß auch dann günstige Anregungsbedingungen gefunden werden können, wenn die Elektronenflugzeit mit der Periode der elektrischen Schwingung vergleichbar wird. Es handelt sich hier um die bekannte Bremsfeldschaltung der genannten Verfasser, bei welcher das Gitter der Röhre auf hoher, positiver, die Anode auf schwach positiver bzw. mehr oder weniger stark negativer Spannung gegen den Heizdraht gehalten wird. In der Folge beschäftigte sich eine ganze Reihe von Autoren mit diesem Gegenstand, die im einzelnen hier nicht aufgeführt zu werden brauchen, da dies in den neueren Arbeiten*)[2])[3]) und außerdem durch das Referat von W. I. Romanoff[4]) auf dem IV. Deutschen Physikertag schon ausführlich geschehen ist. Dort wurde insbesondere darauf hingewiesen, daß sich die verschiedenen Veröffentlichungen in zwei Gruppen einteilen lassen: Nach der Ansicht der einen Gruppe wird die Periode der erzeugten Schwingungen lediglich durch die Flugzeit der Elek-

*) l. c. K. Kohl, Ann. d. Physik **85**, 1, 1928.

1) H. Barkhausen und K. Kurz, Physik. Zeitschr. **21**, 1, 1920.

2) M. T. Grechowa, Zeitschr. f. Phys. **35**, 50 u. 59, 1926 und **38**, 621, 1926.

3) N. Kapzov und S. Gwosdower, Zeitschr. f. Phys. **45**, 114, 1927.

4) W. I. Romanoff, Physik. Zeitschr. **28**, 770, 1927.

tronen festgelegt, nach der Meinung der anderen wird die Frequenz in erster Linie durch den Außenkreis bestimmt. Das Verdienst der russischen Forscher, insbesondere von N. Kapzov[3]) ist es, diesen scheinbaren Widerspruch durch die experimentelle Feststellung aufgeklärt zu haben, daß beide Erscheinungen in ein und derselben Röhre möglich sind. Es handelt sich also um zwei verschiedene Vorgänge, die sich unter Umständen sogar überlagern können.

Wir befassen uns im Folgenden nur mit derjenigen Gruppe von Schwingungen, bei welcher die Frequenz hauptsächlich durch den äußeren Kreis festgelegt ist, für welche außerdem das Potential der Anode sich nur wenig von demjenigen der Elektronenquelle unterscheidet. Für diese Art von Schwingungen existiert bereits eine von E. Gill und I. Morell[5]) mitgeteilte Theorie. Sie gibt indessen keine Erklärung für die kleinen Wellenlängenänderungen, die in diesem Falle (vgl. die russischen Messungen[2])[3])1) durch die Variation der Gitterspannung bei unverändertem Außenkreis verursacht wurden. Außerdem erlaubt die von den britischen Forschern gewählte Form der Darstellung der Vorgänge in der Röhre keinen unmittelbaren rechnerischen Anschluß derselben an die Erscheinungen im Außenkreis. In vorliegender Arbeit wird versucht in einer neuen Darstellung den Übergang vom Elektronenmechanismus in der Röhre zu den elektrischen Vorgängen in den Außenleitern durchzuführen und Amplitude und Frequenz der „Gill-Morell"-Schwingungen als Funktion der Gitterspannung zu berechnen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe handelt es sich letzten Endes darum, elektrische Strombetrachtungen aufzubauen aus der Beobachtung der Bewegung der einzelnen Elektronen. Es sind also von vornherein recht verwickelte Beziehungen zu erwarten und es ergibt sich die Notwendigkeit von erlaubten Vereinfachungen Gebrauch zu machen und gewisse Beschränkungen einzuführen:

1. Die Rechnung soll für ebene Elektrodenform durchgeführt werden. Diese die mathematische Behandlung wesentlich erleichternde Vereinfachung ist insofern berechtigt, als es W. Romanoff[4]) gelungen ist, Schwingungen der genannten Art auch bei Röhren mit plattenförmigen Elektroden zu erzielen.

2. Zwischen Gitter und Glühdraht soll kein Wechselfeld vorhanden sein. Diese zwar nicht völlig richtige Annahme bewährte sich schon bei E. Gill und I. Morell[5]) für eine erste Diskussion der Erscheinungen.

3. Die Elektronenquelle soll in ihrer ganzen Ausdehnung konstantes Potential besitzen.

4. Die Elektronen sollen sich gegenseitig nicht merklich in ihrer Bewegung beeinflussen. Es wird also in den Flugräumen die Gültigkeit der Laplaceschen Gleichung ($\Delta V = 0$) vorausgesetzt und absichtlich auf eine Berücksichtigung von Raumladungserscheinungen verzichtet mit dem Ziel, zunächst festzustellen, welche Vorgänge schon bei Vernachlässigung derartiger Wirkungen zu erwarten sind. Angesichts der hohen Gitterspannung erscheint diese Vereinfachung für mäßige Emissionsströme im allgemeinen unbedenklich; bei der Untersuchung der Vorgänge in unmittelbarer Nähe der Umkehrstelle an der Anode, sowie in der Nachbarschaft des Glühfadens bedarf allerdings der Einfluß der Raumladung noch einer Nachprüfung.

5. Hierzu treten noch die Annahmen kleiner Dämpfung, einer gegen die Gleichspannung kleinen Amplitude der Wechselspannung an den Elektroden, sowie kleiner Frequenzänderungen bei der Variation der Gitterspannung. Wie unten noch im einzelnen gezeigt werden wird, können auch diese Bedingungen in einem großen Bereich der Schwingungen noch als hinreichend erfüllt angesehen werden.

Der Grundgedanke unserer Theorie ist der folgende:

Die Schwingung im Außenkreis bewirkt, wie das schon E. Gill und I. Morell annahmen, Spannungsschwankungen an den Elektroden der Röhre und infolgedessen eine Unterteilung der Elektronen an der Anode. Es bilden sich periodisch ausgezeichnete Elektronengruppen, deren Influenzwirkung auf die Elektroden die Schwingung im Außenkreis weiter anstößt. Es lassen sich nämlich die von den einzelnen bewegten Elektronen hervorgerufenen Stromstöße ersetzen im wesentlichen durch einen Wechselstrom von der Schwingungsfrequenz, den wir dann als den „Zubringerstrom" des Außenkreises ansehen. Die Annahme einer Influenzwirkung, die, erstmals, — wenn auch ohne mathematische Formulierung — von S. Zilitinkewitsch[6]) ausgesprochen wurde, hat insofern allgemeinere Bedeutung, als sicher auch die eigentlichen „Barkhausen-Schwingungen" (charakterisiert durch das hohe negative Anodenpotential) auf diese Weise angefacht werden, wenngleich dort die Gruppenbildung der Elektronen außer einer etwaigen Unterteilung an der Anode noch andere wesentlichere Ursachen haben muß.

5) E. W. B. Gill und I. H. Morell, Phil. Mag. **44**, 161, 1922.
6) S. I. Zilitinkewitsch, Arch. f. Elektrotechnik **15**, 470, 1926.

II. Die Vorgänge in der Elektronenröhre.

1. Die Potentialverteilung in der Röhre.

Da bei den bisher veröffentlichten Messungen stets Glühdrähte als Elektronenquelle verwendet wurden, wollen wir als Bezugspunkt für die Angabe der Spannungen das negative Ende des Heizdrahtes wählen und die Potentiale, bezogen auf diesen Null-Punkt, folgendermaßen definieren:

V_f = Mittleres Potential des Glühdrahtes;
V_a = Gleichpotential der Anode;
V_g = Gleichpotential des Gitters.

Die elektrische Schwingung in dem an Gitter und Anode angeschlossenen Außenkreis erzeugt eine Wechselspannung zwischen diesen beiden Elektroden:

$$v = V_2 \cdot \sin(\omega t),$$

die wir in Richtung Gitter → Anode positiv rechnen wollen. Von Potentialschwankungen zwischen Glühdraht und Gitter wird abgesehen (siehe oben!).

2. Die Elektronenbewegung im Raume „Glühdraht-Gitter".

Aus der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d\mathfrak{v}_x}{dt} = \varepsilon \cdot \frac{dV}{dx} \quad (\varepsilon = \text{absoluter Betrag der spezif. Ladung des Elektrons})$$

berechnet sich die Geschwindigkeit eines Elektrons an der Stelle $x = d_1$ (Gitter siehe Fig. 1) zu:

$$(\mathfrak{v}_x)_{d_1} = \frac{\varepsilon (V_g - V_f)}{\omega d_1} \omega \tau_1 = \frac{2 \omega d_1}{n_1 \pi}$$

wo τ_1 die Flugzeit des Elektrons von der Kathode zum Gitter ist und $n_1 = \frac{\tau_1}{T/2}$, deren Verhältnis zur halben Periode der elektrischen Schwingung festlegt.

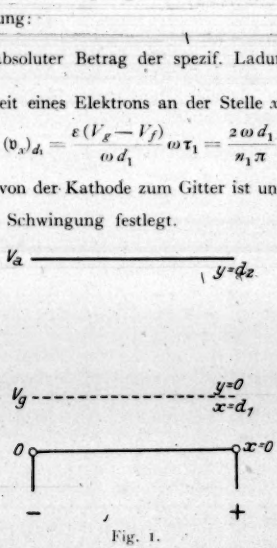


Fig. 1.

3. Die Elektronenbewegung im Raume „Gitter-Anode".

Mit der Geschwindigkeit $(\mathfrak{v}_x)_{d_1}$ treten alle Elektronen in den Raum „Gitter-Anode" ein und werden durch das hier herrschende Feld (V_g ist $\gg V_a$) gebremst. Die Bewegungsgleichung lautet hier:

$$\frac{d\mathfrak{v}_y}{dt} = -\frac{\varepsilon (V_a - V_g)}{d_2} + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{d_2} \cdot \sin(\omega t).$$

Für das zur Zeit $t = t_1$ das Gitter passierende Elektron ergibt die erste Integration dieser Gleichung die Geschwindigkeit im Raume „Gitter-Anode" zu:

$$\mathfrak{v}_y = \frac{2 d_1 \omega}{n_1 \pi} - \frac{\varepsilon \cdot (V_g - V_a)}{\omega \cdot d_2} \cdot (\omega t - \omega t_1) - \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega \cdot d_2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega t_1)].$$

Die nochmalige Integration liefert den Flugweg:

$$y = \frac{\varepsilon \cdot (V_a - V_g)}{2 \cdot d_2 \omega^2} \cdot (\omega t - \omega t_1)^2 + \frac{2 d_1}{n_1 \pi} (\omega t - \omega t_1) + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} \cdot \cos(\omega t_1) \cdot (\omega t - \omega t_1)$$

$$- \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} [\sin(\omega t) - \sin(\omega t_1)].$$

Es ist zweckmäßig, in die weitere Rechnung die mittlere Flugzeit bis zur Umkehr einzuführen, d. h.: diejenige Zeit, die ein Elektron beim Nichtvorhandensein des Wechselfeldes brauchen würde um seinen Umkehrpunkt zu erreichen. Ob der letztere wie im Falle $V_a < V_f$ reell oder wie im Falle $V_a > V_f$ nur virtuell ist, ist für diese rein rechnerische Operation, zumal V_a sich nur wenig von V_f unterscheiden soll, belanglos. Diese Flugzeit bis zur Umkehr (τ_2) folgt aus:

$$\omega \tau_2 = n_2 \pi = \frac{\omega \cdot d_2 \cdot \sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)}}{\varepsilon (V_g - V_a)}, \quad \text{wo } n_2 = \frac{\tau_2}{T/2} \text{ gesetzt ist,}$$

während der Flugweg bis zur Umkehr (im Falle $V_a > V_f$ eine mathematische Extrapolation!) sich darstellt in der Form:

$$y_0 = \frac{\sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)}}{2 \omega} \cdot n_2 \pi = \frac{V_g - V_f}{V_g - V_a} \cdot d_2.$$

Unter der Einwirkung des Wechselfeldes ändert sich nun die Flugzeit der Elektronen bis zur Umkehr periodisch. Diese Änderung ist, solange die Wechselspannungsamplitude gegen die Gleichspannung V_g noch klein ist, selbst gering; sie sei bezeichnet mit $\tau_2 \cdot \delta$, wo $\delta \ll 1$ ist und von der Startzeit $t = t_1$ des Elektrons am Gitter abhängt. Der Flugweg bis zur Umkehr ist dann im Schwingungsfalle gegeben durch die Gleichung:

$$y = y_0 + \Delta y = \frac{n_2 \pi}{2 \omega} \cdot \sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)} \cdot (1 - \delta^2) + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} \cdot [n_2 \pi (1 + \delta) \cos(\omega t_1) + \sin(\omega t_1)$$

$$- \sin(\omega t_1 + n_2 \pi) \cos(n_2 \pi \delta) - \cos(\omega t_1 + n_2 \pi) \cdot \sin(n_2 \pi \delta)].$$

Berücksichtigt man jetzt, daß die Amplitude V_2 klein gegen $V_g - V_a$ vorausgesetzt wurde, daß ferner $(n_2 \pi \delta)$ für nicht zu große Flugzeiten ein kleines Argument ist, so gelangt man nach einfacher Umformung unter Vernachlässigung der quadratisch kleinen, sowie der Glieder höherer Ordnung zu dem Ergebnis:

$$y_0 + \Delta y = \frac{V_g - V_f}{V_g - V_a} \cdot d_2 + \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} \cdot [n_2 \pi \cdot \cos(\omega t_1) + \sin(\omega t_1) - \sin(\omega t_1 + n_2 \pi)].$$

Die Lage des Umkehrpunktes wird also von δ in diesem Falle ganz unabhängig, d. h.: die Änderung der Flugzeit kommt gegenüber dem direkten Einfluß, den die Startphase ωt_1 am Gitter auf den Ort der Umkehr hat, nicht in Betracht. Es empfiehlt sich, statt der Startzeit t_1 die Umkehrzeit $t_2 = t_1 + \tau_2 (1 + \delta)$ einzuführen. So erhalten wir schließlich die Verschiebung Δy des Umkehrpunktes als Funktion der Umkehrphase:

$$\Delta y = \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 \cdot d_2} \cdot M \cdot \sin(\omega t_2 + \Phi),$$

wo:

$$M \cdot \cos \Phi = n_2 \pi \cdot \sin(n_2 \pi) + \cos(n_2 \pi) - 1$$
$$M \cdot \sin \Phi = n_2 \pi \cdot \cos(n_2 \pi) - \sin(n_2 \pi) \quad \text{gesetzt ist.}$$

4. Die Unterteilung an der Anode.

Die „Gill-Morell-Schwingungen" sind dadurch charakterisiert, daß das Anodenpotential V_a von dem der Glühfadenmitte nicht sehr verschieden ist, daß die einsetzende Schwingung also stets eine Unterteilung der das Gitter erstmals passierenden Elektronen herbeiführt in solche, die die Anode erreichen und in solche, die wieder zum Gitter zurückfallen, und zwar sind hier folgende Fälle zu unterscheiden:

1. $V_a > V_f$: Die in den Raum „Gitter-Anode" eintretenden Elektronen werden, solange keine Schwingungen vorhanden sind, alle von der Anode aufgenommen. Der mittlere Umkehrpunkt ist virtuell (liegt hinter der Anode). Setzen Schwingungen ein, so kehrt periodisch ein kleiner Teil der Elektronen vor der Anode um und fällt zum Gitter bzw. Glühdraht zurück.

2. $V_a < V_f$: Solange keine Schwingungen vorhanden sind, fliegen alle Elektronen zum Gitter zurück, der mittlere Umkehrpunkt ist reell (liegt vor der Anode). Im Schwingungsfalle wird periodisch ein Teil der Elektronen von der Anode aufgenommen.

3. $V_a = V_f$: Im Schwingungsfalle tritt totale Unterteilung ein, d. h.: die Hälfte aller in den Raum „Gitter-Anode" eintretenden Elektronen wird von der Anode aufgenommen, die andere Hälfte fällt zum Gitter zurück.

Wir wollen nun zunächst die Frage beantworten:

„Wie groß muß die Spannungsamplitude sein, damit eine Unterteilung der Elektronen eben beginnt? Welche Elektronen fallen zum Gitter zurück bzw. welche erreichen die Anode?"

Die Unterteilung beginnt in jedem Falle, wenn:

$y_0 + \Delta y = d_2$ wird, wobei für Δy bzw. die Extremwerte $\pm \frac{\varepsilon \cdot V_2}{\omega^2 d_2} \cdot M$ für $V_a \lesssim V_f$ einzusetzen sind. Daraus ergibt sich die für eine Unterteilung jeweils erforderliche Mindestamplitude zu:

$$V_{2\min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n_2\pi)^2}{M} \cdot \left(1 - \frac{V_a - V_f}{V_g - V_f}\right) \cdot |V_a - V_f| \sim \frac{1}{2} \frac{(n_2\pi)^2}{M} \cdot |V_a - V_f|.$$

Im Falle $V_a > V_f$ fallen diejenigen Elektronen zuerst zum Gitter zurück, für welche die Umkehrphase:

$$\omega t_2 = \frac{(4k-1)\pi}{2} - \Phi \text{ ist; } (k = 1, 2 \ldots).$$

Im Falle $V_a < V_f$ erreichen diejenigen Elektronen zuerst die Anode, für welche:

$$\omega t_2 = \frac{(4k-3)\pi}{2} - \Phi \text{ ist; } (k = 1, 2, \cdots).$$

Im Grenzfalle $V_a = V_f$ (totale Unterteilung) fallen alle Elektronen zum Gitter zurück, für welche $\Delta y < 0$ ist, also im Bereiche:

$$\pi - \Phi < \omega t_2 < 2\pi - \Phi;$$

die während der anderen Halbperiode an die Anode gelangenden Elektronen werden von dieser aufgenommen.

Tabelle 1.

$n_2\pi$ [Winkelmaß]	M	Φ	$\frac{1}{2}\cdot\frac{(n_2\pi)^2}{M}$	$n_2\pi$ [Winkelmaß]	M	Φ	$\frac{1}{2}\cdot\frac{(n_2\pi)^2}{M}$
30°	0,138	— 21,0°	1,00	210°	4,57	—144,2°	1,46
45°	0,302	— 30,4°	1,02	240°	5,28	—167,1°	1,67
60°	0,530	— 40,3°	1,03	270°	5,79	+ 170,5°	1,91
90°	1,149	— 60,3°	1,07	300°	6,12	+ 145,3°	2,23
105°	1,53	— 70,7°	1,10	330°	6,26	+ 118,8°	2,64
119°	1,91	— 80,1°	1,13	360°	6,28	+ 90,0°	3,13
135°	2,37	— 91,0°	1,17	390°	6,29	+ 58,8°	3,68
150°	2,83	—101,3°	1,22	420°	6,49	+ 25,5°	4,16
180°	3,73	—122,5°	1,32	450°	6,93	— 8,3°	4,43

In der vorstehenden Tabelle I sind für verschiedene Werte $(n_2\pi)$ die zugehörigen M- und Φ-Werte (die letzteren im Winkelmaß) angegeben; ferner ist die für eine Unterteilung erforderliche Mindestamplitude $V_{\min}$ unter der Annahme $|V_a - V_f| = 1$ Volt nach der obigen Näherungsformel berechnet. Man erkennt, daß diese Amplitude insbesondere für große Flugzeiten größer sein muß als der zu überwindende Potentialanstieg $|V_a - V_f|$. Ein Anschwingen ist im allgemeinen deshalb nur dann zu erwarten, wenn wenigstens ein kleiner Teil der emittierten Elektronen schon vor dem Einsetzen der Schwingungen unmittelbar an der Anodenfläche umkehrt.

III. Die Berechnung des Zubringerstromes.

Die Elektronen, die sich in der Röhre bewegen, influenzieren auf den Elektroden elektrische Ladungen. Solange der Elektronenstrom zeitlich konstant ist, kann diese Erscheinung nicht zu Schwingungen Anlaß geben. Erst wenn auf irgendeine Weise eine periodische Gruppierung der Elektronen eintritt, können unter gewissen Bedingungen Schwingungen entstehen. Diese Gruppen-

bildung bringt die Schwingung selbst zustande, und zwar bei den G.-M.-Schwingungen in erster Linie durch die Unterteilung an der Anode in „hinüberkommende" und „nicht hinüberkommende", bei den eigentlichen B.-Schwingungen, wie es schon Kapzov[3]) angedeutet hat, wahrscheinlich durch die Wirkung der bisher nicht berücksichtigten Wechselspannung zwischen Gitter und Glühdraht. Wir beschränken uns hier bei der Beschreibung der G.-M.-Schwingungen auf die Influenzwirkung, die die Elektronen während des weitaus größeren Teiles ihres Fluges, also zwischen Anode und Gitter (n_2 ist in den praktisch vorkommenden Fällen wesentlich größer als n_1) ausüben.

Zunächst betrachten wir ein einzelnes Elektron mit der Ladung $(-e)$, welches sich irgendwo (siehe Fig. 2) in dem von Anode und Gitter gebildeten Kondensator befinden möge. Bezeichnet man mit p_{ik} in der üblichen Weise die Kapazitätskoeffizienten, mit e_1 und e_2 die Aufladungen der Anoden- bzw. der Gitterelektrode, mit $v_1, 2, 3$ die Potentiale, so gelten die bekannten Beziehungen:

$$e_1 = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 + p_{13}v_3$$
$$e_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + p_{23}v_3$$
$$e_3 = p_{13}v_1 + p_{23}v_2 + p_{33}v_3$$

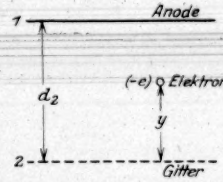


Fig. 2.

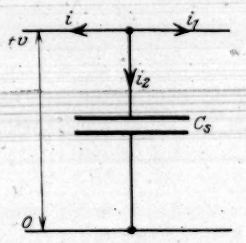


Fig. 3.

Das Elektron kann hier als nahezu punktförmige Ladung aufgefaßt werden. Es ist also: v_1 bzw. $v_2 \ll v_3$ und p_{13} bzw. $p_{23} \ll p_{12}$ oder p_{22} oder p_{11}; d. h. aber: $(p_{13}v_1)$ und $(p_{23}v_2)$ sind klein von der 2. Ordnung und können vernachlässigt werden. So ergibt sich:

$$e_3 = p_{33}v_3 = -e, \text{ wo „}e\text{" der absolute Betrag der El.-Ladung ist.}$$

$$e_1 = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 - \frac{p_{13}}{p_{33}} \cdot e$$

$$e_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 - \frac{p_{23}}{p_{33}} \cdot e$$

Die Koeffizienten $\frac{p_{13}}{p_{23}}$ und $\frac{p_{23}}{p_{33}}$ sind nur von geometrischen Daten abhängig. Sie können daher unter der Annahme $v_1 = v_2 = 0$ berechnet werden. Maxwell[7]) führt diese Rechnung für eine punktförmige Ladung und unendlich ausgedehnte, ebene Kondensatorflächen durch und erhält, in unsere Bezeichnungsweise übertragen:

$$[e_1]_{v_1 = v_2 = 0} = e \cdot \frac{y}{d_2}; \qquad [e_2]_{v_1 = v_2 = 0} = e \cdot \frac{d_2 - y}{d_2}.$$

Da die Größe des Elektrons gegen diejenige der Elektroden nicht in Betracht kommt, dürfen wir dieses Resultat übernehmen. Es ist also:

$$-\frac{p_{13}}{p_{33}} = \frac{y}{d_2} \quad \text{und:} \quad -\frac{p_{23}}{p_{33}} = \frac{d_2 - y}{d_2}$$

und daher:

$$e_1 = p_{11}v_1 + p_{12}v_2 + \frac{y}{d_2} \cdot e$$

$$e_2 = p_{12}v_1 + p_{22}v_2 + \frac{d_2 - y}{d_2} \cdot e.$$

7) J. Cl. Maxwell, Lehrbuch d. Elektr. u. d. Magnetismus 1, 277 (Berlin 1883).

Unter der Voraussetzung gleicher Elektroden ($p_{11} = p_{22} = p$) wird:

$$e_1 - e_2 = (p - p_{12}) \cdot (v_1 - v_2) + \frac{2y - d_2}{d_2} \cdot e,$$

oder, wenn wir die Kapazität $p - p_{12} = C_s$ und $v_1 - v_2 = v$ setzen:

$$e_1 - e_2 = C_s \cdot v + \frac{2y - d_2}{d_2} \cdot e.$$

Ist nun das Elektron zwischen Anode und Gitter in Bewegung, so ist der von den Kondensatorplatten nach außen in eine etwa angeschlossene Lecherleitung abfließende positive Elementarstrom (siehe Fig. 3):

$$i_1 = -\frac{d}{dt}(e_1 - e_2) = -C_s \cdot \frac{dv}{dt} - \frac{2e}{d_2} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$= -i_2 - i.$$

Am Kondensator C_s liegt also gewissermaßen eine Stromverzweigungsstelle. $i = \frac{2e}{d_2} \cdot \frac{dy}{dt} = -(i_1 + i_2)$ ist der von einem einzelnen Elektron gelieferte Beitrag zu dem gesuchten Zubringerstrom des äußeren Kreises (L, C). Er ist der Geschwindigkeit des aktiven Elektrons proportional. Zunächst ist festzustellen, welche Elektronen in jedem Falle aktiv sind bzw. welche Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ in obige Gleichung einzusetzen ist.

1. Einsetzende Unterteilung im Falle: $V_a > V_f$.

Mit Beginn der Unterteilung möge in jeder Periode ein einzelnes Elektron von der Anode zum Gitter zurückfallen. Seine momentane Geschwindigkeit hierbei ergibt sich, wenn wir in $\mathfrak{v}_y$ (siehe II!) statt der Startzeit t_1 des Elektrons am Gitter seine Umkehrzeit an der Anode $t_2 \sim t_1 + \tau_2$ einführen, zu:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega \cdot d_2} \cdot (\omega t - \omega t_2) - \frac{\varepsilon V_2}{\omega d_2} \cdot [\cos(\omega t) - \cos(\omega t_2 - n_2 \pi)].$$

Für den größten Teil der Flugzeit überwiegt das erste Glied stark, so daß in hinreichender Annäherung geschrieben werden kann:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2} \cdot (\omega t - \omega t_2).$$

Diese Gleichung gibt jedoch nur für die Fallzeit, also von $\omega t = \overline{\omega t_2} = \frac{3\pi}{2} - \Phi$ (das ist die Umkehr-

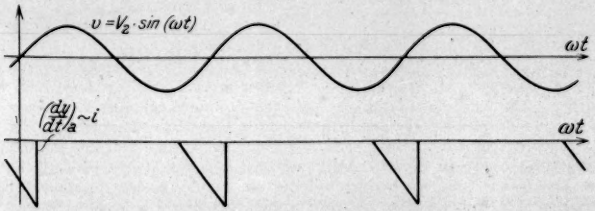


Fig. 4.

phase des ersten zurückfallenden Elektrons an der Anode, siehe II, 4!) bis $\overline{\omega t_3} = \frac{3\pi}{2} - \Phi + n_2 \pi$ (Phase der Rückkunft in die Gitterebene). Der von dem fallenden Elektron gelieferte, zu $\frac{dy}{dt}$ proportionale Strombeitrag besteht also in einem einmaligen Stromstoß von der Dauer des Fluges von der Anode zum Gitter. Zur Zeit $\overline{\omega t_2} = \frac{7\pi}{2} - \Phi$ (allgemein $\frac{(4k-1)\pi}{2} - \Phi$) beginnt ein neues Elektron den Raum „Anode-Gitter" zu durchfallen und hat einen neuen Stromstoß zur Folge. Diese Stöße erfolgen also mit der Frequenz ω der Wechselspannung am Kondensator, d. h. der sich aus-

bildenden Schwingung. Da die bewegte Ladung bei jedem Stoß dieselbe ist, ist der resultierende Strom der Geschwindigkeit des jeweils fallenden Elektrons — sie sei mit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ bezeichnet — proportional und hat deshalb die in Fig. 4 skizzierte, dreieckige Form.

Dieser Verlauf von $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ läßt sich leicht durch eine Fouriersche Entwicklung ersetzen:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_a = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \cdot \sin(\omega t) + \cdots + A_n \cdot \cos(n\omega t) + B_n \cdot \sin(n\omega t),$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\omega t) f(\omega t)\, d(\omega t); \qquad B_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\omega t) f(\omega t)\, d(\omega t).$$

Für: $\omega t_2 \leq \omega t \leq \omega t_2 + n_2\pi$ ist $f(\omega t) = -\frac{\varepsilon \cdot (V_g - V_a)}{\omega d_2} \cdot (\omega t - \omega t_2)$,

im übrigen Teil der Periode ist $f(\omega t) = 0$.

Setzt man die Startphase an der Anode $\omega t_2 = \frac{(4k-1)\pi}{2} - \Phi$ ein, so liefert die Berechnung der Koeffizienten:

$$A_0 = -\frac{\omega d_2}{\pi} \cdot \left| 1 + \frac{V_a - V_f}{V_g - V_a} \right|;$$

$$A_1 = \frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot [n_2\pi \cdot \cos(\Phi - n_2\pi) + \sin(\Phi - n_2\pi) - \sin\Phi] = \frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot f_1(n_2\pi)$$

$$B_1 = -\frac{\varepsilon \cdot (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot [n_2\pi \cdot \sin(\Phi - n_2\pi) - \cos(\Phi - n_2\pi) + \cos\Phi] = \frac{\varepsilon (V_g - V_a)}{\omega d_2 \pi} \cdot f_2(n_2\pi).$$

Auf die Ermittlung der übrigen Koeffizienten kann verzichtet werden, da die schon eingangs gemachte Beschränkung auf kleine Dämpfung es erlaubt, die Entwicklung des Störungsgliedes $f(\omega t)$ nach dem ersten Gliede abzubrechen [8]).

Die bisherige Rechnung bezog sich auf ein einzelnes in jeder Periode von der Anode zum Gitter fallendes Elektron. Tatsächlich ist es jedoch, auch bei einsetzender Unterteilung, eine große Anzahl von Elektronen, die wenigstens nahezu gleichzeitig in jeder Periode zum Gitter zurückfällt. Bezeichnet Q den absoluten Betrag der gesamten, jeweils nahezu gleichzeitig fallenden Ladung, so läßt sich die Summation über die Elementarvorgänge einfach in der Weise durchführen, daß man die oben entwickelte aktive Geschwindigkeit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ statt mit der Elementarladung mit der Gesamtladung Q multipliziert und auf diese Weise den Zubringerstrom berechnet.

2. Einsetzende Unterteilung im Falle: $V_a < V_f$.

In diesem Falle können, solange keine Schwingungen vorhanden sind, keine Elektronen die Anode erreichen. Die Influenzwirkung der zur Anode emporfliegenden Elektronen wird in jedem Augenblick durch eine gleichstarke der herabfallenden Elektronen kompensiert. Tritt infolge einer einsetzenden Schwingung Unterteilung ein, so gelangt ein kleiner Teil der während einer Periode emittierten Elektronen auf die Anode. Im nämlichen Augenblick geht eine „Elektronenlücke" an der Anode ab und wandert mit der Fallgeschwindigkeit, die die aus dem kontinuierlichen Elektronenstrom ausgesparte Elektronenschicht besitzen würde, von der Anode zum Gitter. Diese Lücken gehen also immer zur Zeit der Elektronenaufnahme an der Anode, d. h.: wenn Δy sein Maximum erreicht, von der Anode weg, also mit der Phase:

$$\omega t_2 = \frac{(4k-3)\pi}{2} - \Phi \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Während nun eine solche Lücke von der Anode zum Gitter eilt, markiert sie in jedem Augenblick diejenigen aufsteigenden Elektronen, deren Geschwindigkeit momentan nicht kompensiert wird, also die „aktiven" Elektronen. Die Träger dieser nicht kompensierten Geschwindigkeit — wir bezeichnen letztere wieder mit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ — sind zwar in jedem Augenblick andere Elektronen; da aber die

8) l. c. K. Krüger, Ann. d. Phys. **70**, 291, 1923.

Anzahl der aktiven Elektronen während des ganzen Vorgangs dieselbe bleibt (nämlich gleich der von der Anode aufgenommenen Elektronenzahl), so ist der Verlauf des influenzierten Stromes durch die Geschwindigkeit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ bedingt. Diese aber ist in jedem Augenblick entgegengesetzt gleich derjenigen der Lücke; also in hinreichender Annäherung ist hier:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_a = \frac{\varepsilon\,(V_g - V_a)}{\omega\, d_2} \cdot (\omega t - \overline{\omega t_2}),$$

wo jetzt $\overline{\omega t_2}$ den oben angegebenen Wert hat. So ergibt sich die in Fig. 5 skizzierte Stromform. Die

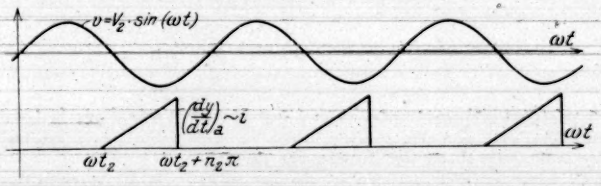


Fig. 5.

Fourier-Entwicklung des Störungsgliedes liefert hier für die Koeffizienten A_1 und B_1 dieselben Werte wie im Falle $V_a > V_f$, während $A_0 = +\frac{\omega d_2}{\pi} \cdot \left|1 + \frac{V_a - V_f}{V_g - V_a}\right|$ jetzt das entgegengesetzte Vorzeichen bekommt wie oben. Physikalisch bedeutet das: Hinsichtlich der Wechselstromverhältnisse unterscheiden sich unter den der Rechnung zugrunde liegenden Bedingungen die Fälle $V_a \gtrless V_f$ überhaupt nicht. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Änderung des Gleichstroms zwischen Anode und Gitter, welche die Schwingung erzwingt, im zweiten Falle im umgekehrten Sinne erfolgt wie im ersten. Diese ganz triviale Tatsache läßt sich sofort am Verhalten des Anoden- und Gitterstromes beim Einsetzen der Schwingungen feststellen (vgl. die Versuche von Gill und Morell[8])!).

3. Totale Unterteilung im Falle $V_a = V_f$.

Dieser Fall kann als Grenzfall jedes der beiden oben behandelten aufgefaßt werden. Wir entwickeln ihn aus dem ersten, indem wir annehmen, daß vor dem Einsetzen der Schwingungen eben noch alle in den Raum „Gitter-Anode" hineinfliegenden Elektronen die Anode erreichen. Sind Schwingungen im Gange, so fallen dann alle Elektronen zum Gitter zurück, für welche $\Delta y < 0$ wird (l. c. S. 453), also im Bereiche:

$$\pi - \Phi \leqq \overline{\omega t_2} \leqq 2\pi - \Phi.$$

Jetzt erfolgt also in jeder Periode nicht ein einzelner von einer bestimmten Elektronenschicht herrührender Stoß wie bei einsetzender Unterteilung, sondern eine Summe von Stößen, die den verschiedenen jetzt während einer Periode nacheinander fallenden Elektronengruppen zukommen. Zu jeder Startzeit an der Anode ($\overline{\omega t_2}$) innerhalb des angegebenen Intervalls, d. h.: zu jeder möglichen Elektronengruppe würde in diesem Falle ein anderer Verlauf der „aktiven Geschwindigkeit" $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$, also eine andere Fouriersche Entwicklung gehören. Es muß daher hier ein Mittelwert der momentanen aktiven Geschwindigkeiten gesucht werden. Das geschieht am einfachsten durch Bestimmung der mittleren Fourier-Koeffizienten.

Die zu einer bestimmten Startgruppe (Abgangsphase $\overline{\omega t_2}$) gehörigen Koeffizienten sind unter Berücksichtigung der Annahme $V_a = V_f$:

$$A_0 = -\frac{\omega d_2}{\pi};$$

$$A_1 = -\frac{\varepsilon(V_g - V_f)}{\omega d_2 \pi} \cdot [n_2\pi \cdot \sin(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) + \cos(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) - \cos(\overline{\omega t_2})];$$

$$B_1 = \frac{\varepsilon(V_g - V_f)}{\omega d_2 \pi} \cdot [n_2\pi \cdot \cos(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) - \sin(\overline{\omega t_2} + n_2\pi) + \sin(\overline{\omega t_2})].$$

A_0 ist von der Startphase ωt_2 unabhängig. Für A_1 und B_1 ergeben sich, wenn ωt_2 in dem oben bezeichneten Intervall variiert wird, nach leicht ersichtlicher Umformung mit Hilfe der hier gültigen Beziehung:

$$n_2 \pi = \frac{2 \omega d_2}{\sqrt{2 \varepsilon (V_g - V_f)}}$$

die Mittelwerte:

$$\overline{A_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\pi - \Psi}^{2\pi - \Psi} A_1 \, d(\omega t_2) = \frac{4 \omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_1}{{n_2}^2};$$

$$\overline{B_1} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\pi - \Psi}^{2\pi - \Psi} B_1 \cdot d(\omega t_2) = \frac{4 \omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_2}{{n_2}^2}.$$

Dabei sind f_1 und f_2 die schon unter 1. angegebenen Funktionen von $(n_2 \pi)$. Die Phasenverhältnisse sind also hier dieselben wie oben. In unserem Sinn aktiv ist jetzt die Hälfte aller in den Raum „Gitter-Anode" hineinfliegenden Elektronen, während in den Fällen $V_a \geq V_f$ nur ein Bruchteil dieser Elektronen zu der Aufrechterhaltung der Schwingung beiträgt.

Ist ein Glühdraht als Elektronenquelle vorhanden, so ist V_f für die einzelnen Partien desselben verschieden. Es ändert sich also längs des Heizdrahtes der Grad der Unterteilung. Doch scheint bei den eigentlichen G.-M.-Schwingungen ein Anschwingen nur dann möglich zu sein, wenn wenigstens für eine kleine Elektronengruppe die Bedingung totaler Unterteilung (Scheitel der Wurfparabel in der Anodenfläche) erfüllt ist. Der Einfachheit halber wollen wir diese Bedingung für die ganze Elektronenquelle als erfüllt ansehen und die weitere Betrachtung lediglich auf der Annahme völliger Unterteilung ($V_a = V_f$) aufbauen.

Von dem zu Beginn des III. Abschnittes berechneten elementaren Zubringerstrom: $i = \frac{2e}{d_2} \cdot \frac{dy}{dt}$ kommen wir zu dem gesamten Zubringerstrom, wenn wir den absoluten Betrag Q der während einer Periode zum Gitter zurückfallenden Ladung mit der nach Fourier entwickelten, mittleren aktiven Geschwindigkeit $\left(\frac{dy}{dt}\right)_a$ multiplizieren. So ergibt sich, wenn wir die eingeführten Strombezeichnungen (i, i_1, i_2) jetzt einfach auf die Gesamtströme übertragen:

$$i = \frac{Q \cdot A_0}{d_2} + \frac{2 Q \cdot A_1}{d_2} \cdot \cos(\omega t) + \frac{2 Q \cdot B_1}{d_2} \cdot \sin(\omega t).$$

Das erste Glied kennzeichnet die Änderung, die der von der Anode zum Gitter fließende Gleichstrom beim Einsetzen der Schwingungen erfährt: $\frac{Q \cdot A_0}{d_2} = -\frac{Q \cdot \omega}{\pi} = \Delta i_{a,g}$. Bezeichnet i_a den nach unserer Annahme beim Nichtschwingen vorhandenen Sättigungsstrom an der Anode und werden alle zurückfallenden Elektronen vom Gitter aufgenommen, so wird hier: $\Delta i_{a,g} = -i_a$ und daher die positive aktive Ladung:

$$Q = i_a \cdot \frac{T}{2} = i_a \cdot \frac{\pi}{\omega}.$$

Für die Aufrechterhaltung der Schwingung ist die Wechselkomponente des Zubringerstromes maßgebend. Sie läßt sich schreiben in der Form:

$$\tilde{i} = \frac{2 Q \cdot \overline{A_1}}{\omega d_2 V_2} \cdot \omega V_2 \cdot \cos(\omega t) + \frac{2 Q \overline{B_1}}{d_2 V_2} \cdot V_2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$= C_i \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_i} \cdot v,$$

indem man die zwischen Anode und Gitter herrschende Wechselspannung $v = V_2 \cdot \sin(\omega t)$ einführt.

Das Ergebnis dieses Abschnitts können wir dann zusammenfassend so aussprechen: Die durch den Elektronenmechanismus hervorgerufenen Stromstöße dürfen im Falle $V_a = V_f$ hinsichtlich ihrer elektrischen Wirkung ersetzt werden durch einen von der Anode zum Gitter fließenden, einer Reihe unwesentlichen Gleichstromkomponente überlagerten, quasistationären Wechselstrom von der Frequenz ω. Die Bahn dieses Stromes müssen wir uns bestehend denken aus einer Kapazität C_i und

einem dazu „parallel geschalteten" Ohmschen Widerstand R_i. Dabei sind diese fiktiven Leitergebilde:

$$C_i = \frac{2Q \cdot \overline{A_1}}{\omega d_2 \overline{V_2}} = \frac{8}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{V_2} \cdot \frac{f_1}{n_2^2} \qquad \text{und:} \qquad \frac{1}{R_i} = \frac{2Q \cdot \overline{B_1}}{d_2 \overline{V_2}} = \frac{8\omega}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{V_2} \cdot \frac{f_2}{n_2^2}$$

Funktionen der Frequenz, des Verhältnisses von aktiver Ladung pro Periode (Q) zur Spannungsamplitude (V_2) und schließlich der Betriebsspannung V_g vermöge der Beziehung: $\omega \tau_2 = n_2 \pi = \frac{2\omega d_2}{\sqrt{2e(V_g - V_f)}}$.

f_1 und f_2 sind Funktionen der Flugzeit τ_2 der Elektronen:

$$f_1 = n_2\pi \cdot \cos(\Phi - n_2\pi) + \sin(\Phi - n_2\pi) - \sin\Phi;$$
$$f_2 = -[n_2\pi \cdot \sin(\Phi - n_2\pi) - \cos(\Phi - n_2\pi) + \cos\Phi].$$

IV. Der „äußere" Schwingungskreis.

Die Berechnung der Influenzwirkung im vorigen Abschnitt ergab an der Röhrenkapazität die Stromverzweigung:

$$i = -(i_1 + i_2).$$

Dabei bedeutet, wenn wir jetzt die bei der Betrachtung des einzelnen Elektrons eingeführte Bezeichnung auf die aus den elementaren Beiträgen resultierenden Gesamtströme übertragen:

i den oben berechneten „Zubringerstrom",
i_1 den Strom, der in die an Gitter und Anode angeschlossenen Außenleiter abfließt,
i_2 den durch die Röhrenkapazität C_s fließenden Strom.

Der Zubringerstrom — hier interessiert nur die Wechselkomponente — ließ sich in der Form darstellen:

$$i = C_i \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_i} \cdot v,$$

wo $v = V_2 \cdot \sin(\omega t)$ die Spannung der Anode gegen das Gitter bedeutete. Es liegt also noch eine zweite Stromverzweigung vor:

$$i = i_3 + i_4,$$

wenn wir als die Zweige (3) und (4) die aus den Betriebsbedingungen der Elektronenröhre errechneten Strombahnen, nämlich die Kapazität C_i und den Widerstand R_i betrachten.

1. Voraussetzung quasistationärer Verhältnisse.

Die an Gitter und Anode angeschlossenen Außenleiter sind in der Regel Lecherdrähte. Der Schwingungsvorgang ist nichtquasistationär. Es erleichtert jedoch den Überblick, wenn zunächst in Kürze die Rechnung unter der Voraussetzung quasistationärer Verhältnisse durchgeführt wird.

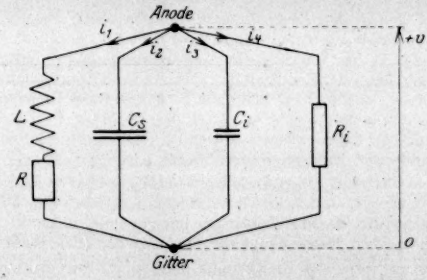


Fig. 6.

Der an Gitter und Anode der Röhre angeschlossene Zweig (1) bestehe aus dem Verbrauchswiderstand R und der Induktivität L. Die Zubringerleitung (3 und 4) liegt dann an der Schwingdrossel (L, C_s); wir erhalten das in Fig. 6 skizzierte Schaltbild. Die Elimination von i_2, i_3 und i_4 aus

den Gleichungen:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

und:

$$L \cdot i'_1 + R \cdot i_1 = \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 \, dt = \frac{1}{C_i} \cdot \int i_3 \, dt = R_i \cdot i_4$$

führt auf die Differentialgleichung:

$$L \cdot (C_2 + C_i) \cdot i''_1 + \left[R \cdot (C_2 + C_i) + \frac{L}{R_i} \right] \cdot i'_1 + \left(\frac{R}{R_i} + 1 \right) \cdot i_1 = 0.$$

ω_0 sei die Eigenfrequenz des Kreises (L, C_2). Die Bedingungen für den eingeschwungenen Zustand (konstante Amplitude und Frequenz) lauten dann:

$$\frac{L}{R_i} + R \cdot (C_2 + C_i) = 0$$

$$1 + \frac{R}{R_i} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \omega^2 L C_i = 0;$$

sie lassen sofort die bekannte Forderung eines negativen Widerstandes R_i erkennen.

2. Ein Paralleldrahtsystem mit Selbststeuerung.

Um auch den praktisch stets vorliegenden nichtquasistationären Schwingungszustand diskutieren zu können, sei im folgenden die von Abraham[9]) gegebene Rechenmethode darauf angewandt, in Kürze eine einfache Theorie eines sich selbst steuernden Lechersystems zu entwickeln. Dabei sei auch ungefähr an die dortige Bezeichnungsweise angeschlossen.

Ein in der Luft frei ausgespanntes Lechersches Paralleldrahtsystem (1, 2 in Fig. 7) von der

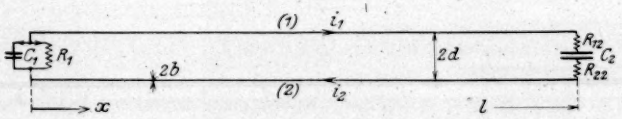


Fig. 7.

Länge l sei an den beiden Enden je durch einen Kondensator C_1 bzw. C_2 überbrückt. Der Energieverbrauch in diesem System, der sich im allgemeinen aus schwer erfaßbaren Einzelbeträgen (dielektrische Verluste, Strahlung, Energieabgabe an ein Meßinstrument usw.) zusammensetzt, sei, um übersichtliche Verhältnisse zu bekommen, in einem Ohmschen Widerstand ($R_2 = R_{12} + R_{22}$) lokalisiert, der zu gleichen Teilen in den Kondensatorzuleitungen von C_2 liegen möge. Die räumliche Ausdehnung dieser Widerstände sei klein. (Man denke etwa an Lötstellen; auch ein Energieentzug durch eine an der Brücke B_2 lose angekoppelte Galvanometerschleife dürfte ähnliche Verhältnisse bedingen.) Energieverluste längs der Paralleldrähte sollen nicht in Frage kommen, eine Voraussetzung, die bekanntlich um so besser erfüllt ist, je höher die Frequenz der Schwingungen, je größer das Reflexionsvermögen der Leiteroberfläche und je kürzer das Drahtsystem ist. Die Strahlungsverluste können durch Wahl eines genügend kleinen Abstandes ($2d$) auf ein Minimum gebracht werden.

Die Frage, die wir uns vorlegen müssen, lautet:

„Wie muß ein parallel zu C_1 liegender Widerstand R_1 beschaffen sein, damit die Amplitudenschwächung, welche die an ($C_2 R_2$) reflektierte Welle erlitten hat, durch die nachfolgende Reflexion an ($C_1 R_1$) wieder wettgemacht wird, damit sich also eine ungedämpfte, stehende elektrische Welle in dem System ausbildet? Von welchen Daten hängt die Frequenz der entstehenden Schwingung ab?"

Das Lechersystem erstrecke sich in Richtung positiver x. Die in Richtung negativer x fortschreitende Ladungswelle sei:

$$e'_1 = A' \cdot e^{j\omega\left(t + \frac{x}{c}\right)}\ ^{10});$$

9) Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität **1**, 309 ff.

10) Von allen derartigen komplexen Ausdrücken mögen die Lateralteile genommen werden.

die in Richtung positiver x fortschreitende Welle sei:

$$e_1'' = A'' \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}.$$

Längs der Paralleldrähte ergibt sich dann die Spannungsverteilung:

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{C} \cdot \left| A' \cdot e^{j\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} + A'' \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right|$$

und die Stromverteilung:

$$i_1 = -i_2 = -c \cdot \left| A' \cdot e^{j\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)} - A'' \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)} \right|,$$

wobei mit $C = \dfrac{1}{4 \cdot \ln\left(\dfrac{d + \sqrt{d^2 - b^2}}{b}\right)}$ die Kapazität der Längeneinheit der Parallelleitung bezeichnet ist.

Wendet man auf die Stelle $x = 0$ die Kirchhoffschen Regeln an, so erhält man die Beziehung:

$$\frac{A' - A''}{A' + A''} = \frac{1}{c \cdot C} \cdot \left| \frac{1}{R_1} + j\omega C_1 \right|.$$

Nun ist zu fordern, daß die durch die Reflexion an (C_2, R_2) geschwächte Welle $A' \cdot e^{j\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$ durch die nachfolgende Reflexion an (C_1, R_1) wieder eine gleichwertige Amplitudenverstärkung erfährt. Demgemäß setze man: $A' = |A| \cdot e^{-\beta + \gamma_1 j}$ und $A'' = |A| \cdot e^{-\gamma_1 j}$, wobei: $0 < e^{-\beta} \leq 1$ vorausgesetzt sei. Durch $(2\gamma_1)$ wird die Phasenverschiebung der einfallenden gegen die reflektierte Welle festgelegt. Ferner führe man die abkürzende Schreibweise ein:

$$u_1 = \frac{1}{c \cdot C \cdot R_1}; \quad v_1 = \frac{\omega \cdot C_1}{c \cdot C}.$$

Dann ist:

$$\frac{A''}{A'} = e^{\beta} \cdot \frac{1 - j \cdot \operatorname{tg}\gamma_1}{1 + j \cdot \operatorname{tg}\gamma_1} = \frac{1 - u_1 - j v_1}{1 + u_1 + j v_1}$$

Die Trennung der Real- und Lateralteile liefert:

$$\cos 2\gamma_1 = e^{-\beta} \cdot \frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{(1+u_1)^2 + v_1^2}; \quad \sin 2\gamma_1 = e^{-\beta} \cdot \frac{2 v_1}{(1+u_1)^2 + v_1^2}$$

und die Kombination dieser Beziehungen nach Einführung einer Hilfsgröße b_1:

$$\text{(I)}: \operatorname{cotg}(2\gamma_1) = -\frac{u_1^2 + v_1^2 - 1}{2 v_1} = b_1; \quad \text{(II)}: e^{2\beta} = \frac{1 - 2u_1 + u_1^2 + v_1^2}{1 + 2u_1 + u_1^2 + v_1^2}$$

Die Formeln (I) und (II) entsprechen den von P. Drude[11]) bei seiner sog. „2. Methode" zur Messung von Dielektrizitätskonstanten auf etwas andere Weise hergeleiteten Beziehungen. Die Tatsache, daß stets $v_1 (\geqq) 0$ ist — auch die hinzukommende, unter Umständen negative dynamische Kapazität C_i vermag praktisch daran nichts zu ändern, da $C_i < C_z$ (siehe Abschnitt V!) —, sowie die Voraussetzung $0 < e^{-\beta} < 1$ führen auf die Forderungen:

1. $0 \leq 2\gamma_1 \leq \pi$ und zwar $\begin{cases} 0 \leq 2\gamma_1 \leq \dfrac{\pi}{2}, & \text{wenn } u_1^2 + v_1^2 \leq 1 \\ \dfrac{\pi}{2} \leq 2\gamma_1 \leq \pi, & \text{wenn } u_1^2 + v_1^2 \geqq 1 \end{cases}$ ist;

2. $u_1 < 0$ bzw., wenn wir eine später verwendete Hilfsgröße a_1 einführen:

$$\frac{1 + u_1^2 + v_1^2}{-2u_1} = a_1 > 1.$$

Daraus ergibt sich sofort — wie zu erwarten war — die Tatsache, daß der Widerstand R_1 negativ sein muß.

Die an (C_1, R_1) reflektierte Ladungswelle $A'' \cdot e^{j\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)}$ werde nun am anderen Ende des Lechersystems an der Brücke (R_2, C_2) neuerdings reflektiert, und zwar derart, daß die neue Reflexionswelle mit der ursprünglichen $A' \cdot e^{j\omega\left(t+\frac{x}{c}\right)}$ in Amplitude und Phase übereinstimmt. In diesem Falle wird die Spannungs- und Stromverteilung längs der Paralleldrähte während der sukzessiven Re-

11) P. Drude, Wied. Ann. **61**, 478, 1897.

flexionen an den beiden Brücken stets durch die oben angegebenen Funktionen $(\Phi_1 - \Phi_2)$ bzw. $i_1 = -i_2$ dargestellt.

Die Anwendung der Kirchhoffschen Regeln auf die Stelle $x = l$ ergibt die Beziehung:

$$\frac{A''}{A'} \cdot e^{-j\frac{2\omega l}{c}} = -\frac{1 + u_2 - jv_2}{1 - u_2 + jv_2}, \quad \text{wobei } u_2 = cCR_2 \text{ und } v_2 = \frac{cC}{\omega C_2} \text{ gesetzt ist.}$$

Die Trennung der Real- und Lateralteile führt nach einfacher Zwischenrechnung schließlich auf die Beziehungen:

$$\text{(III)} \quad \operatorname{cotg} 2\left(\frac{\omega l}{c} + \gamma_1\right) = -\frac{(u_2^2 + v_2^2 - 1)}{2v_2} = b_2 \text{ und: (IV)} \quad e^{2\beta} = \frac{1 + 2u_2 + u_2^2 + v_2^2}{1 - 2u_2 + u_2^2 + v_2^2}$$

Setzen wir jetzt $2\left(\frac{\omega l}{c} + \gamma_1\right) = 2k\pi - 2\gamma_2$, wo $0 \leq 2\gamma_2 \leq 2\pi$ sei, so gelangen wir angesichts der Bedeutung von v_2 und der Voraussetzung über $e^{-\beta}$ zu den Forderungen:

3. $0 \leq 2\gamma_2 \leq \pi$ und zwar $\begin{cases} 0 \leq 2\gamma_2 \leq \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } u_2^2 + v_2^2 \geq 1 \\ \frac{\pi}{2} \leq 2\gamma_2 \leq \pi, & \text{wenn } u_2^2 + v_2^2 \leq 1 \end{cases}$ ist;

4. $u_2 > 0$ und: $\frac{1 + u_2^2 + v_2^2}{2u_2} = -a_2 > 1$, d. h.: R_2 ist, wie es sein muß, ein positiver, Energie verzehrender Widerstand.

Führt man endlich in die Formeln (II) und (IV) die Hilfsgrößen a_1 und a_2 ein, so lassen sich die gewonnenen Beziehungen in der folgenden Weise zusammenstellen:

$$\text{(I)}: u_1^2 + v_1^2 + 2b_1v_1 - 1 = 0; \qquad \text{(II)}: u_1^2 + v_1^2 + 2a_1u_1 + 1 = 0;$$

$$\text{(III)}: u_2^2 + v_2^2 + 2b_2v_2 - 1 = 0; \qquad \text{(IV)}: u_2^2 + v_2^2 + 2a_2u_2 + 1 = 0;$$

$$\text{(V)}: \frac{\omega l}{c} + \gamma_1 + \gamma_2 - k\pi = 0; \qquad \text{(VI)}: a_1 + a_2 = 0,$$

wobei:

$$a_1 = \frac{e^{2\beta} + 1}{e^{2\beta} - 1}; \quad b_1 = \operatorname{cotg} 2\gamma_1; \quad b_2 = -\operatorname{cotg} 2\gamma_2,$$

$$u_1 = \frac{1}{cCR_1}; \quad v_1 = \frac{\omega C_1}{cC} \quad \text{und} \quad u_2 = cCR_2; \quad v_2 = \frac{cC}{\omega C_2} \text{ ist.}$$

Nach Einführung der Wellenlänge λ der elektrischen Schwingung stellt sich die Gleichung (V) dar in der Form:

$$l = \frac{\lambda}{2} \cdot \left| k - \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{arc\,cotg}(b_1) + \operatorname{arc\,cotg}(-b_2)\right)\right|.$$

Diese Formel gibt den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge λ, der Länge l des Paralleldrahtsystems und den Eigenschaften b_1 und b_2 der begrenzenden Brücken wieder; die Beziehung ist deshalb recht kompliziert, da im allgemeinen auch die Hilfsgrößen b_1 und b_2 über v_1 und v_2 von der Wellenlänge abhängen. k bedeutet die Anzahl der auf der Strecke l zwischen den beiden Brücken liegenden Spannungsknoten. Für $k = 1$ bzw. $k = 2, 3, \ldots$ erhält man die Grundschwingung bzw. die anharmonischen Oberschwingungen des durch C_1, R_1, C_2, R_2, C und l bestimmten Systems. Ob alle diese Schwingungen, bzw. welche, sich tatsächlich ausbilden, das hängt von der besonderen Art der Erregung ab und kann erst im folgenden V. und VI. Abschnitt entschieden werden.

Der für die Amplitudenschwächung charakteristische Reflexionsfaktor $e^{-\beta}$ bestimmt sich aus der Hilfsgröße a_1: $e^{-\beta} = \sqrt{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1}}$.

Die Entfernungen der Brücken B_1 und B_2 von den ihnen zunächst liegenden Spannungsknoten seien D_1 bzw. D_2 und erfüllen die Gleichung:

$$D_{1,2} = \frac{\lambda}{4} \cdot \left(1 - \frac{2\gamma_{1,2}}{\pi}\right) \text{ und zwar ist:}$$

$0 \leq D_1 \leq \frac{\lambda}{8}$, wenn $u_1^2 + v_1^2 \geq 1$ ist. Dagegen: $\frac{\lambda}{8} \leq D_1 \leq \frac{\lambda}{4}$, wenn $u_1^2 + v_1^2 \leq 1$

$0 \leq D_2 \leq \frac{\lambda}{8}$, wenn $u_2^2 + v_2^2 \leq 1$ ist. $\frac{\lambda}{8} \leq D_2 \leq \frac{\lambda}{4}$, wenn $u_2^2 + v_2^2 \geq 1$

Vielleicht ist es von Interesse, daß sich der etwas verwickelte Zusammenhang zwischen den Größen u_1, v_1, u_2, v_2 und den Hilfsgrößen a_1, a_2, b_1, b_2 auf eine recht anschauliche geometrische Form (Fig. 8) bringen läßt:

Die Kurven (I) und (III) sind zwei Individuen des elliptischen Kreisbüschels: $u^2 + v^2 + 2bv - 1 = 0$ mit den Grundpunkten $(+1, 0)$ und $(-1, 0)$, während die Kreise (II) und (IV) dem konjugierten hyperbolischen Büschel: $u^2 + v^2 + 2au + 1 = 0$ zugehören. Das elliptische Büschel steht in unmittelbarem Zusammenhang mit den Brückenverkürzungen, insofern nämlich, als die

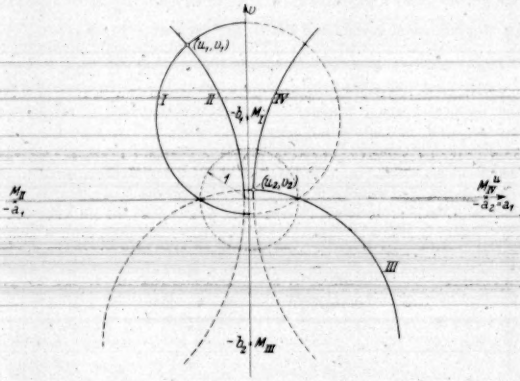


Fig. 8.

Lage der Kreismittelpunkte $M_{\text{I bzw. III}}$ auf der v-Achse durch die Hilfsgröße b gegeben ist. Das hyperbolische Büschel gibt Aufschluß über den Grad der Reflexion, da hier die Kreismittelpunkte $M_{\text{II bzw. IV}}$ auf der u-Achse durch die Hilfsgröße a festgelegt sind.

(I) × (II) liefert die zu a_1 und b_1 zugehörigen Werte u_1 und v_1,
(III) × (IV) liefert die zu a_2 und b_2 zugehörigen Werte u_2 und v_2;

wobei bezüglich der Gültigkeit der Lösungen zu beachten ist, daß u_1 negativ, u_2, v_1 und v_2 dagegen positiv sein müssen. Es läßt sich also an Hand dieser Darstellung leicht übersehen, wie sich der Reflexionsfaktor und die Brückendistanz D bei Variation von u und v verändern. Liegt z. B. der Punkt (u_1, v_1) außerhalb des Einheitskreises, so ist $D_1 < \frac{\lambda}{8}$, im anderen Falle größer, während für D_2 und Punkt (u_2, v_2) das Kriterium sich umkehrt. Im allgemeinen gehören zu einem gegebenen Reflexionsfaktor und vorgegebenem positiven v_1 zwei verschiedene Werte u_1.

3. Verschiedene Schaltmöglichkeiten.

Um die soeben abgeleiteten, allgemeinen, mathematischen Beziehungen für unsere spezielle Fragestellung nutzbar zu machen, sind jetzt über R_1, C_1 und C_2 noch bestimmte nähere Annahmen zu machen.

Die Brücke B_1 werde durch eine mit Anode und Gitter an das Lechersystem angeschlossene, in der oben gekennzeichneten Weise betriebene Elektronenröhre gebildet. Es ist dann:

$$R_1 = R_i,$$

d. h.: den notwendig negativen Widerstand R_1 muß der aus der Influenzwirkung (siehe Abschn. III!) errechnete innere Widerstand bilden. Die Brückenkapazität C_1 setzt sich zusammen aus der statischen Kapazität C_s der Elektroden und der durch den Elektronenmechanismus hervorgerufenen dynamischen Kapazität C_i (siehe oben!), d. h. es ist:

$$C_1 = C_s + C_i.$$

Ist der Sockel der Röhre entfernt und sind die Elektrodenzuleitungen geradlinige kurze Verlängerungen der Lecherdrähte — eine Voraussetzung, die bei den käuflichen Röhrentypen allerdings

meist schlecht erfüllt ist —, so dürfte die Berechnung der Röhrenkapazität C_r aus den geometrischen Daten der Elektroden wenigstens einen ersten Näherungswert liefern. Außerdem besteht die Möglichkeit, C_r aus der experimentell beobachteten Brückenverkürzung zu ermitteln.

Die andere Brückenkapazität C_2 kann an sich jede Größe haben. In der Tat sind auch bei der Ausbildung von Kurzwellenschaltungen alle Möglichkeiten ausprobiert worden:

$C_2 = 0$ freies Ende, umgebildet zum offenen Resonator, z. B. bei H. Barkhausen[1]).
C_2 ein kleiner, veränderlicher Kondensator [J. Sahánek[12]); G. Marconi[13])],
$C_2 \to \infty$, ein großer fester Kondensator [E. Gill u. I. Morell[5]), A. Scheibe[14]), N. Kapzov[3])].

Von diesen Möglichkeiten kommt nur die zuletzt genannte für messende Versuche in Betracht und zwar aus folgendem Grunde: Es ist unvermeidlich die Batteriezuleitungen z_a und z_g irgendwo an die Lecherdrähte anzulegen. Geschieht dieser Anschluß symmetrisch, aber an einer beliebigen Stelle (siehe Fig. 9), so zerlegt er durch seinen kapazitiven Einfluß (C_3) das System gewissermaßen in einen Primärkreis P und einen mehr oder weniger lose damit gekoppelten Sekundärkreis S. Die Untersuchung der Frequenz- und Amplitudenverhältnisse in Abhängigkeit von den Betriebsbedingungen der Röhre kann in diesem Falle durch die sekundäre Resonanzerscheinung zwischen P und S getrübt werden. Klare Verhältnisse erhält man dann, wenn die Batterieanschlüsse in einem Spannungsknoten angelegt werden, dessen Lage auch bei Frequenzänderungen des Systems gut definiert bleibt. Die oben angeführten Forscher erreichen das in der Weise, daß als Brückenkondensator C_2 eine

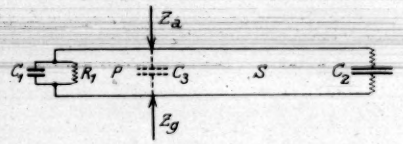


Fig. 9.

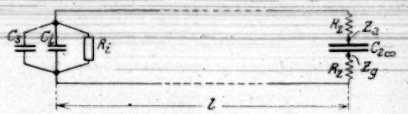


Fig. 10.

gegen die verteilte Kapazität C der Drähte sehr große Kapazität (ein Blockkondensator von etwa 5000 cm genügt) eingeschaltet wird, an deren Belege unmittelbar die Batteriezuleitungen angeschlossen sind. Diese in der Fig. 10 skizzierte Schaltung liegt unserer weiteren Betrachtung zugrunde.

Mathematisch drückt sich die gewählte Spezialisierung so aus: Wir setzen in dem allgemeinen Gleichungssystem (S. 462)

$$v_2 = \frac{\varepsilon C}{\omega C_2} = 0 .$$

Dann wird:

$$2\gamma_2 = \operatorname{arccotg}(-b_2) = \pi \text{ und daher: (V)} \quad \frac{2\omega l}{c} = (2k-1)\pi - 2\gamma_1 .$$

Die Länge der Lecherleitung wird:

$$l = \frac{\lambda}{4} \cdot \left(2k - 1 - \frac{2\gamma_1}{\pi}\right); \qquad k = 1,2 \cdots$$

V. Der Zusammenhang der Vorgänge in der Röhre mit denen im Außenkreis.

Durch Verknüpfung der Ergebnisse der Berechnung des Elektronenmechanismus mit den Bedingungen für die Unterhaltung einer stationären Schwingung im Außenkreis ist es nun möglich, die Frequenz und Amplitude der Schwingung zu berechnen.

1. Der quasistationäre Zustand.

Setzt man in die S. 460 gefundene Bedingung für konstante Amplitude und Frequenz die S. 459 gewonnenen Werte

$$\frac{1}{R_i} = \frac{2Q\overline{B_1}}{d_2 V_2} \quad \text{und} \quad C_i = \frac{2Q\overline{A_1}}{\omega d_2 V_2}$$

12) J. Sahánek, Physik. Zeitschr. **26**, 368, 1925.
13) G. Marconi, Referat in der Zeitschr. „Radio für Alle“ **2**, 109, 1924.
14) A. Scheibe, Zeitschr. f. Hochfr.-Techn. **27**, 1, 1926.

ein, so erhält man die Gleichungen:

(1) $R\omega C_s = \frac{-2Q}{d_2 V_2} \cdot (R \cdot A_1 + \omega L B_1)$ und: (2) $1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{-2Q}{d_2 V_2} \cdot (R \cdot B_1 - \omega L \cdot A_1)$.

Die Elimination der Amplitude aus diesen beiden Gleichungen führt nach Einführung der die Dämpfung charakterisierenden Größe $\varkappa = \frac{R}{\omega_0 L}$ auf die Frequenzbedingung:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^3 - (1 - \varkappa^2) \cdot \frac{\omega}{\omega_0} - \varkappa \cdot \frac{A_1}{B_1} = 0,$$

welche sich unter Beschränkung auf kleine Dämpfung ($\varkappa^2 \ll 1$) und kleine Frequenzänderungen $\Delta\omega = \nu \cdot \omega_0$ ($\nu \ll 1$) vereinfacht zu:

$$\nu = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\varkappa}{2} \cdot \frac{A_1}{B_1} - \frac{\varkappa^2}{2}.$$

Zur Ermittlung der Amplitude V_2 gehen wir von Gl. (1) aus:

$$V_2 = \frac{-2Q}{R\omega C_s d_2} \cdot (R \cdot A_1 + \omega L \cdot B_1),$$

die auf Grund der Annahme kleiner Frequenzänderungen ($\nu \cdot \omega_0$) und geringer Dämpfung ($\varkappa$) nach erlaubten Vernachlässigungen übergeht in die Form:

$$V_2 = \frac{-2Q}{d_2} \cdot \frac{L}{R \cdot C_s} \cdot (1 + \varkappa^2 + 2\nu) \cdot B_1.$$

Der rechtzeitige Anstoß des Außenkreises (L, C_s) würde so erfolgen, daß sich die Eigenfrequenz ω_0 dieses Kreises ausbildet. Die zugehörige Amplitude $(V_2)_0$ ergibt sich also für $\nu = 0$, d. h. für $B_1 = (B_1)_0$ zu:

$$(V_2)_0 = \frac{-2Q}{d_2} \cdot \frac{L}{R \cdot C_s} \cdot (1 + \varkappa^2) \cdot (B_1)_0$$

und die Amplitudenbedingung stellt sich schließlich dar in der Form:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} = \left(1 + \frac{2\nu}{1 + \varkappa^2}\right) \cdot \frac{B_1}{(B_1)_0}.$$

Nachdem der Gang der Rechnung an dem übersichtlicheren quasistationären Fall kurz gezeigt ist, wollen wir jetzt — ohne uns schon hier in eine Diskussion der Ergebnisse einzulassen — erst noch versuchen, die Voraussetzung quasistationärer Verhältnisse fallenzulassen.

2. Der nichtquasistationäre Fall.

Die oben getroffene spezielle Wahl des 2. Brückenkondensators $\left(\frac{C_2}{C} \to \infty\right)$ verwandelt das S. 462 angegebene allgemeine Gleichungssystem unter Berücksichtigung der für C_1 und R_1 S. 463 eingeführten Werte in die folgende Gestalt:

(I): $u_1^2 + v_1^2 + 2b_1 v_1 - 1 = 0$; (II): $u_1^2 + v_1^2 + 2a_1 u_1 + 1 = 0$;

(III): $u_2^2 + v_2^2 + 2b_2 v_2 - 1 = 0$; (IV): $u_2^2 + v_2^2 + 2a_2 u_2 + 1 = 0$;

(V): $\frac{\omega l}{c} + \gamma_1 - \frac{(2k-1)\pi}{2} = 0$; (VI): $a_1 + a_2 = 0$;

wo:

$$a_1 = \frac{e^{2\beta} + 1}{e^{2\beta} - 1}; \qquad b_1 = \operatorname{cotg} 2\gamma_1; \quad b_1 \to +\infty \qquad u_1 = \frac{1}{cCR_i};$$

$$v_1 = \frac{\omega (C_s + C_i)}{cC}; \qquad u_2 = cCR_2; \qquad v_2 = 0 \text{ ist.}$$

Die Eigenschaften der Brücke (2) sind also vollständig vorgegeben, wenn wir noch den Grad der Amplitudenschwächung durch den Reflexionsfaktor $e^{-\beta}$ und damit die Größe $a_1 = -a_2$ festlegen, sowie die Eigenschaften (C, l) der Doppelleitung als bekannt voraussetzen. Außerdem sei die statische Kapazität C_s der Elektronenröhre vorgegeben. Die Größen R_i und C_i sind als Funktionen

der Frequenz, Amplitude und der Betriebsbedingungen der Röhre bekannt. Die Aufgabe, die wir uns stellen müssen, lautet dann:

Unter Beschränkung auf eine kleine Amplitudenschwächung (Dämpfung) und kleine Frequenzänderungen sind die Frequenz und die Amplitude als Funktionen der übrigen Größen, insbesondere der Betriebsspannung V_g zu entwickeln.

Aus (I) und (II) ergibt sich durch Subtraktion die einfachere Beziehung:

$$a_1 u_1 - b_1 v_1 + 1 = 0$$

oder:

$$\frac{a_1}{\omega C R_i} - \frac{b_1 \omega (C_s + C_i)}{\omega C} + 1 = 0$$

in die wir die Werte: $C_i = \frac{2 Q A_1}{\omega d_2 V_2}$ und $\frac{1}{R_i} = \frac{2 Q B_1}{d_2 V_2}$ einsetzen.

Für das Verhältnis der pro Periode aktiven Ladung Q zur Spannungsamplitude V_2 folgt dann:

$$\frac{Q}{V_2} = \frac{\omega C d_2}{2} \cdot \frac{1 - b_1 \frac{\omega C_s}{\omega C}}{b_1 A_1 - a_1 B_1} = \frac{\omega C d_2}{2} \cdot \frac{1 - b_1 p}{b_1 A_1 - a_1 B_1}, \tag{1}$$

wenn wir in abkürzender Bezeichnung: $\frac{\omega C_s}{\omega C} = p$ setzen.

Die Berechnung von ω und V_2 erfordert noch eine zweite Gleichung; es empfiehlt sich die Verwendung von Gl. (II):

$$u_1^2 + v_1^2 + 2 a_1 u_1 + 1 = 0,$$

die sich nach Einführung der für C_i und $\frac{1}{R_i}$ oben gegebenen Werte schreiben läßt in der Form:

$$\left(\frac{2}{\omega C d_2}\right)^2 \cdot (A_1^2 + B_1^2) \cdot \left(\frac{Q}{V_2}\right)^2 + \frac{4}{\omega C d_2} \cdot a_1 B_1 + p \cdot A_1 \cdot \frac{Q}{V_2} + p^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Die Kombination der Gleichungen (1) und (2) ergibt nach Einführung der Größe $Z = \frac{A_1}{B_1}$ ($B_1 \neq 0$!) und einfacher Zwischenrechnung die in Z quadratische Gleichung:

$$Z^2 - 2 a_1 p \cdot Z + \frac{1 - a_1^2}{1 + b_1^2} \cdot (1 - b_1 p)^2 + a_1^2 p^2 = 0$$

mit den Lösungen:

$$Z = a_1 p \pm (1 - b_1 p) \cdot \sqrt{\frac{a_1^2 - 1}{b_1^2 + 1}}.$$

Bei kleiner Dämpfung $\left(\frac{1}{a_1^2} \ll 1\right)$ dürfen wir uns schon mit der Näherung begnügen:

$$Z = a_1 p + a_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2 a_1^2}\right) \cdot (1 - b_1 p) \cdot (1 + b_1^2)^{-1/2}. \tag{3}$$

Zunächst wollen wir nun diejenigen Werte der Funktion Z berechnen, die zur Erregung der Eigenfrequenzen ω_0 des Lecherkreises gehören. Die letzteren sind dabei so zu definieren: Es sind diejenigen Frequenzen, die sich einstellen, wenn die verkürzende Wirkung der durch die Röhre gebildeten Brücke (Fig. 10) dieselbe ist, wie bei alleinigem Vorhandensein der statischen Kapazität C_s der Elektroden. Im Falle der Ausbildung der Eigenfrequenzen ist also:

$$b_1 = (b_1)_0 = \left(\frac{1 - u_1^2 - v_1^2}{2 v_1}\right)_0 = \frac{1 - p_0^2}{2 p_0}, \qquad \text{wobei } p_0 = \frac{\omega_0 C_s}{\omega C} \text{ ist.}$$

Diese Frequenzen errechnen sich aus Gl. (V), die in diesem Falle lautet:

$$\frac{2 \omega_0 l}{c} - (2k - 1)\pi + (2\gamma_1)_0 = 0; \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

Nach Einführung der Abkürzung $\frac{\omega_0 l}{c} = q_0$ und Berücksichtigung der Bedeutung von b_1

(vgl. S. 466) ergibt sich hieraus die Beziehung:

$$\operatorname{cotg}(2q_0) = -\operatorname{cotg}(2\gamma_1)_0 = -(b_1)_0 = \frac{p_0^2 - 1}{2p_0}, \tag{4}$$

mit deren Hilfe wir schließlich für $p = p_0$ und $b_1 = (b_1)_0$ aus Gl. (3) die zu den Eigenfrequenzen ω_0 gehörigen Z-Werte ermitteln:

$$Z_0 = a_1 p_0 (\pm) a_1 p_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2a_1^2}\right).$$

Eine einfache Abschätzung der Schwingungsamplitude V_2, auf deren Wiedergabe hier verzichtet werden darf, ergab, daß von den zwei theoretisch möglichen Wurzelwerten für den Resonanzvorgang praktisch nur der eine: $Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}$ in Betracht kommt.

Die allgemeine Formel für Z (Gl. 3), in der wir jetzt auch nur das negative Vorzeichen der Wurzel zu berücksichtigen brauchen, kann auf Grund der schon eingangs eingeführten Beschränkungen in eine übersichtlichere Form gebracht werden. Vor allem machen wir jetzt Gebrauch von der Annahme, daß bei konstantem Außenkreis (l, C_x usw.) die Variation der Betriebsbedingungen der Röhre (enthalten in Z) nur kleine Abweichungen $\nu \cdot w_0$ ($\nu \ll 1$) der Frequenz gegen die Eigenfrequenz ω_0 dieses Kreises hervorbringen soll, indem wir setzen: $\nu = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, also: $p = p_0(1+\nu)$ und $q = q_0(1+\nu)$. Eine einfache Umformung ergibt dann (l. c. Gl. V!):

$$(1 + b_1^2)^{-1/2} = \sin(2\gamma_1) = \sin[2q_0(1+\nu)].$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe nach Potenzen von ν und bricht diese unter der Voraussetzung eines kleinen Argumentes ($2q_0\nu$) mit dem linearen Glied ab, so erhält man bei Berücksichtigung von (4):

$$(1 + b_1^2)^{-1/2} = \frac{2p_0}{1 + p_0^2} \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{2p_0} \cdot 2q_0\nu\right).$$

Ferner formen wir mit Hilfe von (V) um:

$$b_1 = \operatorname{cotg}(2\gamma_1) = \operatorname{cotg}[(2k-1)\pi - 2q_0(1+\nu)]$$
$$= \frac{\operatorname{tg}(2q_0\nu) - \operatorname{cotg}(2q_0)}{1 + \operatorname{tg}(2q_0\nu) \cdot \operatorname{cotg}(2q_0)}.$$

Die Voraussetzung, daß ($2q_0\nu$) ein kleiner Bogen ist, daß ferner $\operatorname{tg}(2q_0\nu) \cdot \operatorname{cotg}(2q_0)$ praktisch klein gegen 1 ist — die Berechtigung dieser Annahmen wird unten im Zusammenhang geprüft werden — erlaubt es, nach Anwendung der Binomial- und der tang-Entwicklung die Größe b_1 bei Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung zu schreiben in der Form:

$$b_1 = -\operatorname{cotg}(2q_0) + [1 + \operatorname{cotg}^2(2q_0)] \cdot 2q_0\nu$$

oder unter Beachtung von (4):

$$b_1 = \frac{1 - p_0^2}{2p_0} + \left(\frac{1 + p_0^2}{2p_0}\right)^2 \cdot 2q_0\nu. \tag{5}$$

Setzt man jetzt die soeben für p, b_1 und $(1 + b_1^2)^{-1/2}$ gefundenen Werte ein in die Gl. (3):

$$Z = a_1 p - a_1\left(1 - \frac{1}{2a_1^2}\right) \cdot (1 - b_1 p) \cdot (1 + b_1^2)^{-1/2},$$

so gelangt man unter Beschränkung auf das in ν lineare Glied zu der Beziehung:

$$Z = \frac{p_0}{2a_1} + 2a_1 \cdot \left(q_0 + \frac{p_0}{1 + p_0^2}\right) \cdot \nu, \tag{6}$$

aus der endlich die gesuchte Näherungsformel für die Frequenzänderungen hervorgeht:

$$\nu = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{Z - Z_0}{2a_1 \cdot \left(q_0 + \frac{p_0}{1 + p_0^2}\right)}, \qquad Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}. \tag{7}$$

Die Berechnung der Amplitude V_2, zu der wir jetzt übergehen, geschieht am besten mit Hilfe

der etwas umgeformten Gl. (1):

$$V_2 = -\frac{2a_1 Q}{cCd_2} \cdot \frac{1 - \frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{A_1}{B_1}}{1 - b_1 p_0 (1+\nu)} \cdot B_1 .$$

Nach Einsetzen des in (5) für b_1, sowie des in (6) für $Z = \frac{A_1}{B_1}$ gefundenen Wertes und unter Vernachlässigung von kleinen Gliedern höherer Ordnung gelangt man zu dem Resultat:

$$V_2 = -\frac{4a_1 Q}{cCd_2} \cdot \frac{B_1}{1+p_0^2} \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{4a_1^2} + 2p_0 q_0 \nu\right).$$

Die Amplitude $(V_2)_0$ (bei rechtzeitigem Stoß) geht hieraus hervor, wenn $\nu = 0$ und $B_1 = (B_1)_0$ gesetzt wird:

$$(V_2)_0 = -\frac{4a_1 Q}{cCd_2} \cdot \frac{(B_1)_0}{1+p_0^2} \cdot \left(1 + \frac{p_0^2 - 1}{4a_1^2}\right). \tag{8}$$

Unter Berücksichtigung der Kleinheit der Dämpfung ($0{,}8 < e^{-\beta} < 1$) ergibt sich dann schließlich als Verhältnis der Amplitude V_2 zur Normalamplitude $(V_2)_0$ die Näherung:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} = (1 + 2p_0 q_0 \nu) \cdot \frac{B_1}{(B_1)_0}, \tag{9}$$

wobei ν die in Gl. (7) angegebene Funktion ist.

3. Der Geltungsbereich der Rechnung.

Es wurde im Laufe der mathematischen Entwicklung von einigen Vereinfachungen Gebrauch gemacht, deren physikalische Möglichkeit noch zu erweisen ist.

In dem Abschnitt, der über den Elektronenmechanismus handelte, wurde insbesondere vorausgesetzt, daß die Flugzeit der Elektronen bis zur Umkehr (τ_2) durch die Wechselspannung $V_2 \cdot \sin(\omega t)$ nur eine kleine Änderung ($\delta \cdot \tau_2$) erfährt. Das ist dann der Fall, wenn die Amplitude V_2 keine zu großen Werte annimmt. Im allgemeinen dürfen wir in dem Bereiche $0 < n_2 < 1{,}5$ $\left(n_2 = \frac{\tau_2}{T/2}\right)$ noch eine hinreichende Annäherung erwarten, wenn wir $\frac{V_2}{V_g - V_f} < \frac{1}{10}$ voraussetzen. Darüber hinaus, bis etwa $n_2 = 2{,}5$ dürfen wir nur für die wesentlich schärfere Bedingung $\frac{V_2}{V_g - V_f} < \frac{1}{100}$ eine Anwendbarkeit der Rechnung erwarten.

Außerdem wurden im letzten Abschnitt einige Vernachlässigungen vorgenommen, deren wesentliche die folgenden sind:

Die relative Frequenzänderung:

$$\nu = \frac{Z - Z_0}{2a_1\left(q_0 + \frac{p_0}{1+p_0^2}\right)}$$

sollte als noch klein gegen 1 betrachtet werden können. Das ist aber nur für hinreichend große a_1-Werte angängig. Hier stoßen wir also wieder auf die schon anfangs von uns gemachte Annahme kleiner Dämpfung. Um ν abzuschätzen, beschränken wir uns zunächst auf die Grundschwingung des Lecherkreises ($k = 1$) und wählen beispielsweise $a_1 = 20$, was einem Reflexionsfaktor $e^{-\beta} = 0{,}95$ entspricht. Dann ist die praktisch etwa zu stellende Forderung $\nu \lesssim 0{,}05$ in einem um so größeren Intervall von Z-Werten (siehe hierzu Fig. 11!), d. h. in einem um so größeren Flugzeitbereich erfüllt, je kleiner p_0 ist, je größer also die Wellenlänge der Schwingung und je kleiner die statische Kapazität C_s der Röhre ist. Da diese p_0-Werte praktisch ungefähr im Intervall $1 \lesssim p_0 < 4$ liegen, läßt sich die an ν gestellte Forderung experimentell hinreichend erfüllen. Fig. 11 zeigt ferner, daß sich mit Erhöhung der Dämpfung (z. B. $e^{-\beta} = 0{,}82$) der Geltungsbereich der Rechnung ebenfalls verkleinert und sich etwas in Richtung wachsender Z-Werte (d. h. abnehmender Flugzeiten, Tab. II. S. 470) verschiebt.

Auch über $q_0 = \frac{\omega_0 l}{c}$ mußte oben eine Annahme gemacht werden. Vermöge der Beziehung (4) läßt sich dem für p_0 oben zugelassenen Intervall der Bereich: $0{,}5\,\pi + 2\,(k-1)\pi \gtrsim 2q_0 > 0{,}16\,\pi + 2\,(k-1)\pi$ zuordnen. Solange $k = 1$ ist, d. h. solange der Lechersche Kreis in der Grundschwingung erregt ist, darf in diesem Bereich unter der schon anfangs gemachten Voraussetzung kleiner Frequenzänderungen (ν) bei unverändertem Außenkreis der Bogen ($2q_0\nu$) als klein betrachtet werden. Ebenso ist cotg $(2q_0) \cdot$ tg $(2q_0\nu)$ in dem angegebenen Intervall noch hinreichend klein gegen 1. Was die Oberschwingungen des Außenkreises anlangt ($k = 2, 3 \ldots$), so kann unsere Annäherung nur in immer näherer Umgebung des rechtzeitigen Stoßes ($\nu = 0$) die Verhältnisse noch richtig wieder-

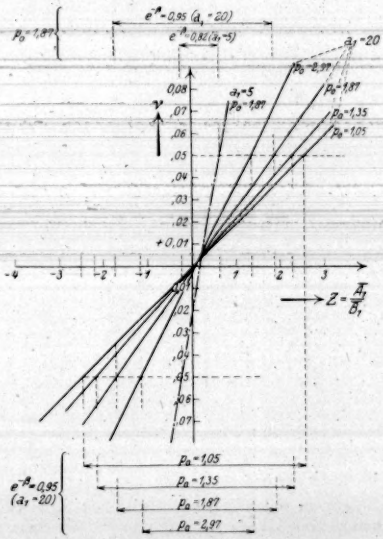


Fig. 11.

geben. Das bedeutet jedoch nicht eine gleichstarke Einschränkung des zulässigen Flugzeitintervalles (d. h. des Bereiches von Z), da mit wachsender Ordnungszahl k, also mit zunehmendem q_0 sich ohnedies ν erniedrigt (Gl. 7).

Zusammenfassend läßt sich sagen: Das Bestreben, die komplizierten mathematischen Zusammenhänge durch eine, wenn auch rohe, relativ einfache Näherung zu ersetzen, erfordert eine ziemlich starke Einschränkung ihrer Anwendung, und zwar decken sich die Geltungsbereiche der Rechnung — wie sich zeigen wird — in vielen Teilen ungefähr mit den experimentell beobachteten Bereichen der „Gill-Morell"-Schwingungen. Es ist dies die Hauptschwierigkeit in der mathematischen Behandlung des Problems. Sie legt den interessanten Gedanken nahe, daß außerhalb dieser Gebiete, wo die komplizierten Vorgänge im Elektronenmechanismus sich nicht mehr genügend „abschleifen" würden, die Störungen des denkbar einfachsten Verlaufs der Erscheinungen im allgemeinen dämpfend wirken, ja unter Umständen ein Anschwingen überhaupt unmöglich machen.

VI. Diskussion der Ergebnisse, Vergleich mit Experimenten.

Da bis jetzt die vorliegende Erzeugungsweise nur für sehr hohe Frequenzen in Betracht kommt, befassen wir uns hier nur mit dem nichtquasistationären Fall. In der oben entwickelten Theorie kamen wir zu dem Ergebnis, daß die Amplitude und die Frequenz der erregten Schwingung — wir setzen

nach wie vor totale Unterteilung voraus — von den Größen:

$$A_1 = \frac{4\omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_1}{n_2^2} \quad \text{und} \quad B_1 = \frac{4\omega d_2}{\pi^4} \cdot \frac{f_2}{n_2^2} \text{ abhängt.}$$

Dabei sind f_1 und f_2 die am Schlusse des III. Abschnittes angegebenen Funktionen von $(n_2\pi)$, einer Größe, die ihrerseits die Flugzeit der Elektronen zwischen Anode und Gitter (τ_2) charakterisiert und mit der Betriebsspannung am Gitter (V_g) in der einfachen Beziehung steht (S. 459):

$$n_2\pi = \omega\tau_2 = \frac{2\omega d_2}{\sqrt{2\varepsilon(V_g - V_f)}}. \tag{10}$$

Man erkennt sofort: Irgendwelche Einschränkungen der Funktionen f_1 und f_2 bedeuten bei gegebenem Außenkreis und gegebener Röhre auch gewisse Grenzen des anwendbaren Gitterspannungsbereiches. In der Tabelle II sind für verschiedene Argumente $(n_2\pi)$ die f_1- und f_2-Werte und die insbesondere interessierenden Kombinationen:

$$Z = \frac{A_1}{B_1} = \frac{f_1}{f_2} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{f_2}{n_2^2} \text{ angegeben.}$$

Tabelle II.

$n_2\pi$	n_2	f_1	f_2	Z	ν	$n_2\pi$	n_2	f_1	f_2	Z	ν
30°	0,167	— 0,089	+ 0,102	— 0,87$_3$	+ 3,66	210°	1,168	+ 4,32	+ 1,43	+ 3,01	+ 1,05
45°	0,250	— 0,264	+ 0,147	— 1,80	+ 2,35	240°	1,334	+ 2,34	+ 4,72$_5$	+ 0,495	+ 2,66
60°	0,333	— 0,524	+ 0,089	— 5,88	+ 0,80$_1$	270°	1,500	— 1,93	+ 5,46	— 0,353	+ 2,42
90°	0,500	— 0,989	— 0,587	+ 1,69	— 2,36	300°	1,668	— 5,72	+ 2,14	— 2,67$_5$	+ 0,770
105°	0,583	— 0,951	— 1,19	+ 0,80	— 3,50	330°	1,834	— 5,28	— 3,35	+ 1,57$_5$	— 0,995
119°	0,662	— 0,639	— 1,79$_5$	+ 0,357	— 4,11	360°	2,000	0,00	— 6,28	0,00	— 1,57$_5$
135°	0,750	+ 0,089	— 2,36$_5$	— 0,038	— 4,21	390°	2,17	+ 5,58	— 2,92	— 1,91	— 0,620
150°	0,834	+ 1,09	— 2,60	— 0,419	— 3,73	420°	2,34	+ 5,05$_5$	+ 4,07	+ 1,24	+ 0,742
180°	1,000	+ 3,37	— 1,57	— 2,14	— 1,57	450°	2,50	— 1,98$_5$	+ 6,62	— 0,299	+ 1,06

1. Die Schwingungsbereiche.

In Fig. 12 ist der Verlauf der Funktion $Y = \frac{f_2}{n_2^2}$ und $Z = \frac{f_1}{f_2}$ graphisch dargestellt. Das Diagramm gibt sofort Antwort auf die Frage, in welchen Flugzeitbereichen $(n_2\pi)$ Schwingungen nach dieser Methode überhaupt unterhalten werden können. Schwingungen sind dann möglich, wenn der dynamische Widerstand der Röhre R_i bzw. sein reziproker Wert (siehe Abschn. III):

$$\frac{1}{R_i} = \frac{8\omega}{\pi^4} \cdot \frac{Q}{V_2} \cdot Y \text{ negativ ist.}$$

Da Q den absoluten Betrag der aktiven Ladung bedeutet, muß also im Schwingungsfalle $Y < 0$ sein, eine Forderung, die dem Diagramm gemäß in zwei für unsere Rechnung noch in Betracht kommenden Gebieten:

$$0{,}37 < n_2 < 1{,}10$$

und

$$1{,}73 < n_2 < 2{,}25 \text{ (dieser Bereich nur für sehr kleine Amplituden!)}$$

erfüllt ist. Doch auch in diesen Intervallen können Schwingungen der berechneten Art nur erwartet werden, solange die Abweichung (ν) von der Eigenfrequenz des Außenkreises klein bleibt. Für das erste hauptsächlich in Betracht kommende Intervall sind die Gebiete, in welchen das hinreichend der Fall ist, für verschiedene Werte p_0 und Dämpfungen durch Übertragung aus Fig. 11 eingezeichnet. Während das erste oben angegebene Intervall ungefähr den Bereich der beobachteten „Gill-Morell"-Schwingungen umfaßt, liegen Messungen in dem zweiten Intervall nicht vor. Immerhin bestände die Möglichkeit, daß die gelegentlich, insbesondere von M. Grechowa[2]) beobachteten Wellen, die zweimal kürzer waren als die der Gill-Morellschen Beziehung: $\lambda^2 V_g = \text{const.}$ entsprechende Wellenlänge und deren Zustandekommen noch nicht geklärt ist, mit diesem Anregungsgebiet etwas zu tun haben. Sichere Schlüsse in dieser Richtung können jedoch einstweilen nicht gezogen werden, da wir uns hier an der Grenze der möglichen Extrapolation vorliegender Rechnung befinden.

2. Der „rechtzeitige" Anstoß.

An Hand von Fig. 12 läßt sich nun sofort die Frage beantworten, wie das Verhältnis $n_2 = \frac{\tau_2}{T/2}$ und damit die Gitterspannung zu wählen ist, damit irgendeine der Eigenfrequenzen ω_0 des äußeren Kreises angeregt wird. Gemäß Formel (7) ist in diesem Falle zu fordern $r = 0$, d. h.: es sind in den Gebieten, in welchen $Y < 0$ ist (negativer Widerstand!), diejenigen n_2-Werte zu suchen, für welche $Z = Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}$ wird.

a) Verschwindend kleine Dämpfung ($a_1 \to \infty$):

In diesem Falle ist $Z_0 = 0$. Den Eigenfrequenzen entsprechen dann gemäß Fig. 12 die Nullstellen der Funktion Z:

$$\text{I: } (n_2)_0 = 0{,}74 \quad \text{und} \quad \text{II: } (n_2)_0 = 2{,}0.$$

Von (II) sehen wir aus dem oben mitgeteilten Grunde einstweilen ab. Das durch Stelle (I) gegebene, dem rechtzeitigen Stoß im Falle unendlich kleiner Dämpfung entsprechende Verhältnis von Flugzeit

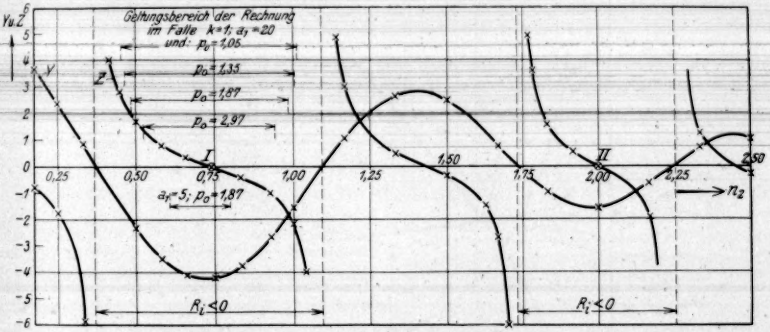


Fig. 12.

und halber Schwingungsdauer stimmt sehr gut mit dem von Gill und Morell experimentell und auf anderem Wege theoretisch für die günstigste Anregung ermittelten Werte überein. Setzt man diesen n_2-Wert in die Gl. (10) (S. 470) ein, so gelangt man zu dem schon von Gill und Morell mitgeteilten Grundgesetz: $\lambda^2 \cdot V_g = \text{const.}$, aus dem sich die zum rechtzeitigen Stoß jeweils erforderliche Gitterspannung errechnen läßt für $a_1 \to \infty$:

$$(V_g - V_f)_{0\,(\text{Volt})} = 7{,}30 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{d_2}{\lambda_0}\right)^2. \tag{11a}$$

b) Der Einfluß der Dämpfung auf die Erregung der Eigenfrequenzen:

Das Grundgesetz $\lambda^2 \cdot V_g = \text{const.}$ gilt jedoch, streng genommen, nicht mehr, wenn wir eine von 0 verschiedene Dämpfung in Betracht ziehen. Die Formel $Z_0 = \frac{p_0}{2a_1}$ $\left(\text{wobei } p_0 = \frac{\omega_0 C_s}{cC}\right)$ läßt erkennen, daß in diesem Falle der dem rechtzeitigen Stoß zukommende Z-Wert von der Frequenz und der statischen Kapazität C_s der Röhre abhängt, und zwar in um so höherem Maße, je größer die Dämpfung ist. Dasselbe gilt dann natürlich auch von der zugehörigen Flugzeit. Bei vorgegebener Röhre (C_s) verschiebt sich der zur Erregung der Eigenfrequenzen gehörige Wert $(n_2)_0$ mit wachsender Frequenz und Dämpfung nach Werten, die kleiner sind als 0,74, bleibt aber in der Nachbarschaft dieser Stelle. Die zugehörige Betriebsspannung berechnet sich dann nach der allgemeineren Formel:

$$(V_g - V_f)_{0\,[\text{Volt}]} = 4 \cdot 10^6 \left[\frac{d_2}{(n_2)_0 \cdot \lambda_0}\right]^2, \tag{11b}$$

wobei jetzt also $(n_2)_0$ vermöge der Beziehungen: $Z_0 = G\,(n_2)_0 = \frac{\hat{p}_0}{2\,a_1} = \frac{\pi\,C_s}{a_1\,\lambda_0\,C}$ selbst eine Funktion von λ_0 ist. Dieser Zusammenhang ist in Fig. 13 für eine bestimmte Elektronenröhre ($C_s = 3$ cm, $d_2 = 0{,}60$ cm) und eine bestimmte Dämpfung $a_1 = 20\,(e^{-\beta} = 0{,}95)$ durch die gestrichelte Kurve dargestellt, in Fig. 14a außerdem noch für $a_1 = 5\,(e^{-\beta} = 0{,}82)$ um die Verschiebung der Kurve bei Erhöhung der Dämpfung zu zeigen.

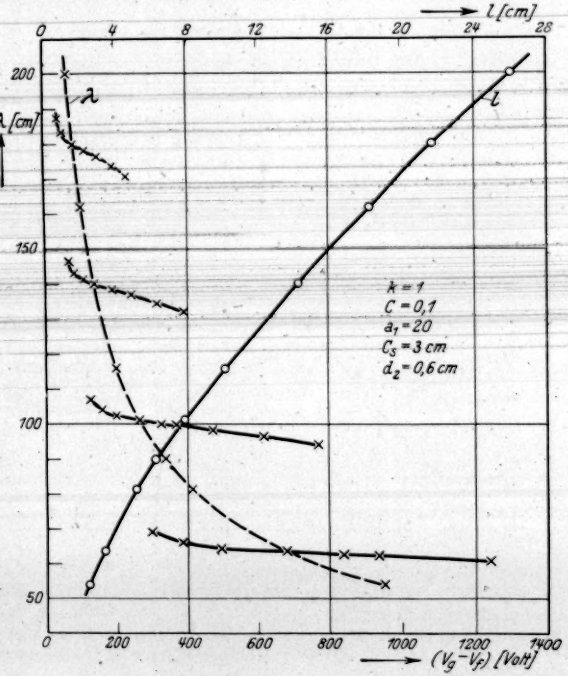


Fig. 13.

Jeder Eigenwelle λ_0 entspricht eine bestimmte Einregulierung der Länge l der angeschlossenen Außenleiter, die für die Daten ($C_2 \to \infty$; $C_s = 3$ cm; $C = 0{,}1$) und für die Erregung des Grundtones ($k = 1$) nach der bekannten Formel (vgl. S. 464)

$$l = \frac{\lambda_0}{4}\left(2\,k - 1 - \frac{(2\,\gamma_1)_0}{\pi}\right)$$

errechnet und in die Fig. 13 mit eingezeichnet wurde.

Um nun auch die beim rechtzeitigen Anstoß sich ausbildende „Normalamplitude" als Funktion der zugehörigen Betriebsspannung $(V_g - V_f)_0$ bzw. der Wellenlänge λ_0 darzustellen, setzen wir die Größe $(\overline{B}_1)_0 = \frac{4\,\omega_0\,d_2}{\pi^4} \cdot Y_0$ zusammen mit dem im Abschnitt III, 3 für die aktive Ladung angegebenen Wert $Q_0 = i_a \cdot \frac{\pi}{\omega_0}$ in die Formel (8) für die Normalamplitude ein und erhalten:

$$(V_2)_{0\,[\text{Volt}]} = -\frac{0{,}48}{\pi^3} \cdot \frac{a_1}{C \cdot (1 + \hat{p}_0^2)} \cdot \left(1 + \frac{\hat{p}_0^2 - 1}{4\,a_1^2}\right) \cdot Y_0 \cdot i_{a\,[\text{mA}]}.$$

Die Normalamplitude hängt also über p_0 und indirekt über $Y_0 = F(n_2)_0$ von der Normalwelle λ_0 und damit von der Betriebsspannung $(V_g - V_f)_0$ ab, außerdem von dem in den Raum „Gitter-Anode" gelangenden Elektronenstrom i_a. Der letztere ist seinerseits eine Funktion der Emission der Glühkathode, sowie der „Durchlässigkeit" des Gitters. Diese wiederum ist in unserem Fall in erster Linie durch die geometrischen Eigenschaften des Gitters gegeben, hängt aber im allgemeinen auch von der variablen Gitterspannung V_g ab und kann von Fall zu Fall aus dem Verhältnis des Sättigungsstromes an der Anode zum Emissionsstrom i_e ermittelt werden. Da es uns hier zunächst nur um eine qualitative Abschätzung der Vorgänge zu tun sein kann, nehmen wir vereinfachend an, daß stets

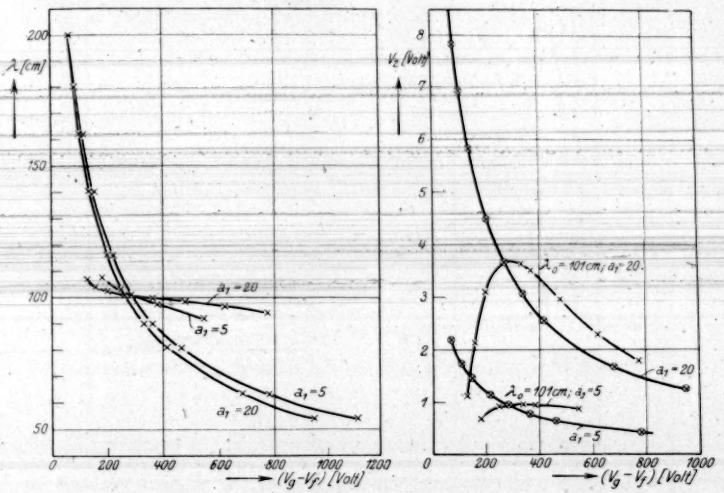


Fig. 14a u. b.

die Hälfte der emittierten Elektronen in den Raum „Gitter-Anode" gelange; wir setzen also: $i_a = m \cdot i_e$, wobei $m = \text{const.} = 0{,}5$ sei.

In Fig. 15 ist unter dieser Annahme der Zusammenhang zwischen der Normalamplitude $(V_2)_0$ und der Betriebsspannung $(V_g - V_f)_0$ für das schon oben eingeführte Beispiel und eine Emissionsstromstärke $i_e = 2{,}5$ [mA] durch die gestrichelte Linie eingezeichnet. Den Einfluß der Dämpfung zeigt Fig. 14b. Intensitätsmessungen, die zum Vergleich herangezogen werden könnten, liegen noch nicht vor.

3. Die praktische Grenze für die Verkürzung der Welle.

In der Fig. 16 ist für das genannte Beispiel diejenige Emissionsstromstärke i_e angegeben, die bei totaler Unterteilung nötig ist, um bei verschiedenen Abstimmungen (l) des Außenkreises, sowie verschiedener Dämpfung dessen Eigenwelle λ_0 zu einer Amplitude $(V_2)_0 = 10$ Volt zu erregen. Man erkennt, wie außerordentlich schnell sich die Betriebsverhältnisse der Röhre bei Verkleinerung der Eigenwelle λ_0 (d. h.: Vergrößerung von p_0) verschlechtern. Die Röhrenkapazität C_e wirkt bei steigender Frequenz mehr und mehr als schädlicher Nebenschluß. Die hierdurch erzwungene Steigerung der Emission ist bei den handelsüblichen Röhren, die einen elektrisch geheizten Faden als Kathode besitzen, noch wesentlich größer als in der Figur, weil dort wegen des Potentialgefälles am Glühdraht im Mittel nur eine unvollständige Unterteilung der Elektronen an der Anode eintreten kann, also ein kleinerer Bruchteil der emittierten Elektronen „aktiv" wird. Um bei möglichst hohen Frequenzen noch hinreichende Amplituden zu erzielen, muß man bei gegebenem Abstand „Anode-Gitter" (d_2) die Betriebsspannung $(V_g - V_f)$, sowie den Emissionsstrom möglichst steigern, die Röhrenkapazität C_e und damit die Elektroden möglichst klein halten (Verkleinerung von p_0!). Die erste Forderung: einer hohen Belastbarkeit der Röhre schließt aber die andere: kleiner Elektrodenausmaße aus. Man wird also einen Kompromiß zwischen beiden schließen müssen. Hierdurch ist eine praktisch nicht

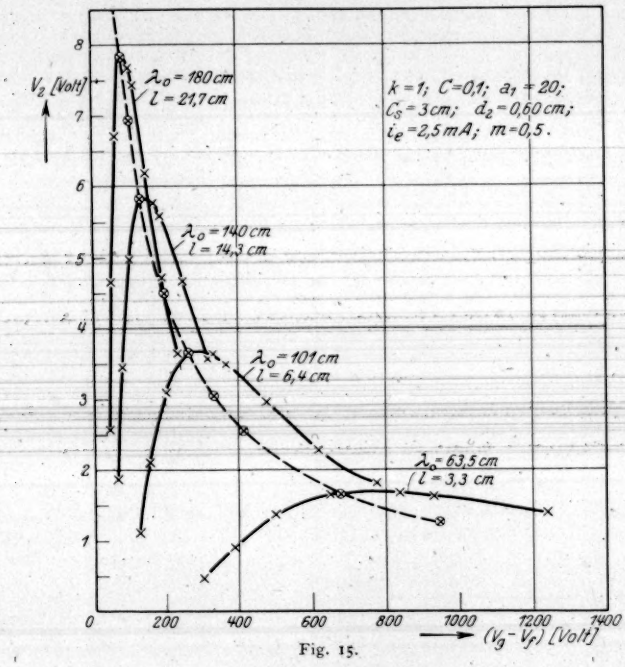


Fig. 15.

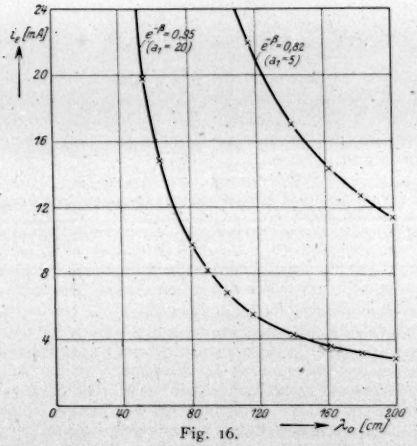


Fig. 16.

überschreitbare, untere Grenze für die nach vorliegender Methode erzielbaren Wellenlängen (es ist hier nur von der Grundschwingung die Rede) gegeben.

4. Die Abweichungen von der Eigenfrequenz und der Normalamplitude.

Die Experimentalarbeiten der russischen Forscher brachten die Feststellung, daß auch bei einer bestimmten Länge (l) des Außenkreises (d. h. konstanter Eigenwelle λ_0) Schwingungen nicht nur für eine einzelne, sondern für einen ganzen Bereich von Gitterspannungen (V_g) erhalten werden können, und zwar ändert sich in diesem Falle die Wellenlänge der Schwingung etwas mit der Variation von V_g. Der Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Gitterspannung wird dann (l. c. die Fig. 17 und 18) durch ein „treppenartiges Gebilde" dargestellt, wobei einer bestimmten „Stufe" eine bestimmte Einregulierung (l) des Außenkreises entspricht.

Auch unsere oben entwickelte Theorie liefert in der Wellenlängenbeziehung:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot (1 - \nu) = \lambda_0 \cdot \left| 1 - \frac{Z - Z_0}{2 a_1 \left(q_0 + \frac{\hat{p}_0}{1 + \hat{p}_0^2} \right)} \right| \tag{7a}$$

einen derartigen Zusammenhang, wie man sofort erkennt, wenn man sie auf das schon mehrfach erwähnte Beispiel:

$$a_1 = 20; \quad C = 0{,}1; \quad k = 1; \quad d_2 = 0{,}60 \text{ cm}; \quad C_g = 3 \text{ cm}$$

anwendet. In Fig. 13 sind die so errechneten „Stufen", und zwar in einer Länge, wie sie durch die Zulässigkeit unserer Rechnung bedingt ist, eingezeichnet. Außerdem wurde für die oben schon angenommenen Daten:

$$i_e = 2{,}5 \text{ [mA]}; \quad m = 0{,}5$$

die jeweilige Spannungsamplitude V_2 als Funktion von $(V_g - V_f)$ nach der oben gewonnenen Formel:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} = (1 + 2 \hat{p}_0 q_0 \nu) \cdot \frac{B_1}{(B_1)_0} \quad \text{berechnet,} \tag{9}$$

die sich nach Einsetzen aller bekannten Größen auf die Näherungsform bringen läßt:

$$\frac{V_2}{(V_2)_0} \sim [1 + (1 + 2 \hat{p}_0 q_0) \nu] \cdot \frac{Y}{Y_0}.$$

$(V_2)_0$ und ν wurden oben schon berechnet; der Zusammenhang zwischen Y und $V_g - V_f$ (über n_2) ist bekannt. Es läßt sich also, wie das in Fig. 15 ausgeführt ist, auch die Abhängigkeit der Amplitude V_2 von der Gitterspannung V_g bei verschiedener Einregulierung (l) des Außenkreises aufzeichnen. Man erkennt, daß die Erregung der Maximalamplitude innerhalb einer Stufe sehr nahe mit derjenigen der Eigenfrequenz zusammenfällt.

Aus Fig. 14 entnehmen wir endlich noch, daß bei zunehmender Dämpfung sich der Einfluß der Gitterspannung auf die Wellenlänge bei konstantem Außenkreis verstärkt, die Stufe verläuft steiler.

Zwischen dem Experiment und der vorliegenden Theorie erkennen wir nun in folgenden Punkten die zunächst zu erweisende qualitative Übereinstimmung:

a) Die Wellenlänge innerhalb einer „Stufe" nimmt mit Erhöhung der Betriebsspannung $(V_g - V_f)$ ab, und zwar in um so geringerem Maße, je kürzer die Eigenwelle λ_0 ist, auf die der zugehörige Außenkreis abgestimmt ist, je höher also das betreffende Gitterspannungsgebiet liegt. Man vgl. hierzu die Fig. 17 und 18 mit Fig. 13!

b) Die Grenzen der experimentell beobachteten Stufen (l. c. Fig. 18!) rücken im Gebiet höherer Gitterspannung mehr und mehr auseinander. Dieselbe Erscheinung erhalten wir in Fig. 13, wenn wir die Bereiche theoretisch mit der Gültigkeit unserer Näherungsrechnung, d. h. nach Maßgabe der Möglichkeit eines denkbar einfachsten Naturvorgangs abgrenzen (l. c. S. 469). Die Punkte maximaler Anregung (fette Punkte in Fig. 17, M in Fig. 18, Maxima in Fig. 15) liegen dann etwas gegen die linken Grenzen (kleiner Gitterspannung) der möglichen Anregungsintervalle verschoben.

c) Das Diagramm in Fig. 17 wurde von M. Grechowa an einem Zweiröhrengenerator (C_2 wurde durch eine zweite im Betrieb befindliche Röhre gebildet) aufgenommen. Wenn sich hierdurch auch nichts Wesentliches ändern kann gegenüber den für eine Röhre geltenden Betrachtungen, so gab doch erst die Anwendung der unserer Rechnung zugrunde liegenden Einröhrenschaltung durch N. Kapzov und S. Gwosdower[3]) Aufschluß über die genaue Form der im Fall $V_a \sim 0$ erhaltenen λ, V_g-Kurven (Fig. 18). Ein Blick auf Fig. 13 zeigt, daß auch dieser „cotangens"-ähnliche Verlauf der Stufen von unserer Theorie befriedigend wiedergegeben wird.

d) Bisher war in der Diskussion nur von dem Grundton des Außenkreises ($k = 1$) die Rede

Da aus praktischen Gründen bei der Verkürzung der Welle oft der 1. oder 2. Oberton ($k = 2, 3, \ldots$) benutzt werden muß — der 1. Spannungsknoten rückt nämlich dann häufig ins Innere der Röhre — sei kurz darauf hingewiesen, welche Änderung hierdurch bedingt ist.

Aus den Messungen der Fig. 17 läßt sich die Einwirkung der Ordnungszahl k auf die Form der einzelnen Stufen wenigstens ungefähr ablesen. Stellt man nämlich die Eigenwelle λ_0 als immer höhere anharmonische Oberschwingung des Außenkreises her ($k = 2, 3, 4 \ldots$), so sollte man zunächst,

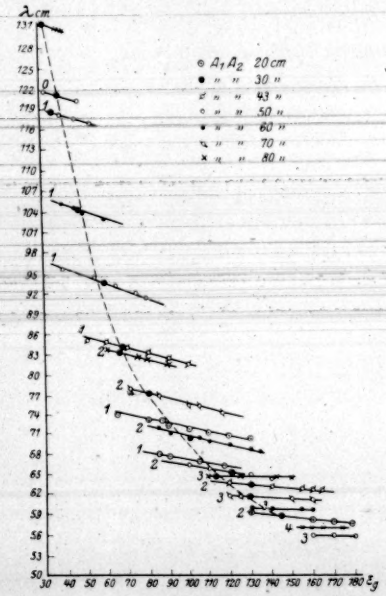


Fig. 17.

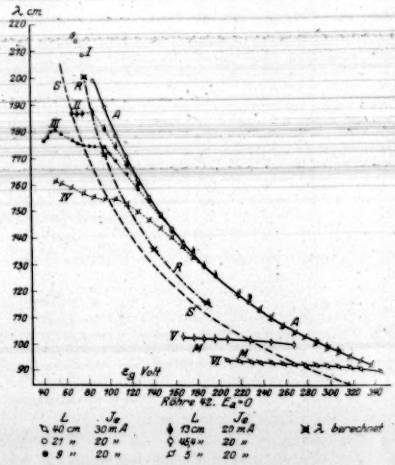


Fig. 18.

da ja die Verlängerung der Lecherleitung eine Erhöhung der Dämpfung bringt, einen immer steileren Verlauf der Stufen erwarten. Das tritt aber nicht ein. Vergleicht man die Stufen 2, 3 mit der Stufe 1 im ungefähr gleichen Gitterspannungsniveau ($\lambda_0 = \text{const}$), so erkennt man, daß die Neigung der Stufe mit wachsender Ordnungszahl im allgemeinen konstant bleibt. Für diese Tatsache finden wir in unserer Formel (7a) eine Erklärung, wenn wir uns an die Bedeutung der Größe $q_0 \doteq \frac{\omega_0 l}{c} = (2k-1) \cdot \frac{\pi}{2} - (\gamma_1)_0$ erinnern. q_0 wächst mit k, so daß insbesondere beim Übergang vom 2. zum 3., 4.... Oberton*) die Einwirkung der erhöhten Dämpfung ungefähr durch die Vergrößerung von q_0 kompensiert werden kann. Genaueres läßt sich erst nach quantitativen Dämpfungsmessungen sagen.

5. Ungeklärte Fragen.

Es soll nun zum Schluß auf einige Punkte hingewiesen werden, die in vorliegender Theorie keine Erklärung gefunden haben. Vor allem ist dies die Abhängigkeit der Amplitude und der Frequenz von kleinen Änderungen des Anodenpotentials V_a. Hierzu kann vorläufig nur vermutungsweise folgendes gesagt werden: Solange es sich um eigentliche G.-M.-Schwingungen handelt und insbesondere infolge des Spannungsabfalles am Glühdraht eine Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen

*) In Fig. 17 bedeutet (1) die erste Oberschwingung, $k = 2$ in unserer Bezeichnung!

gegeben ist, wird eine Änderung des Anodenpotentials in erster Linie den Grad der Unterteilung an der Anode beeinflussen. Außerdem ist im Falle $V_a + V_f$ der Unterteilungsgrad natürlich eine Funktion der Amplitude V_2. Das gibt Anlaß zu folgender Überlegung:

Die Berechnung des Außenkreises lieferte ein bestimmtes Verhältnis $\frac{Q}{V_2}$ (1 in Fig. 19); damit also bei gegebenem Außenkreis und bestimmten Betriebsverhältnissen der Röhre die Amplitude V_2 aufrecht erhalten wird, muß die Unterteilung an der Anode eine dazu proportionale, bestimmte, aktive Ladung Q pro Periode verfügbar machen. Nur in dem oben behandelten Fall totaler Unterteilung ($V_a = V_f$) ist diese verfügbare Ladung von der Amplitude unabhängig, kann also bei vorgegebener Emission als konstant (2 in Fig. 19) angesehen werden. Ist jedoch $V_a \gtrless V_f$, so wird die verfügbare aktive Ladung selbst eine Funktion der Amplitude V_2; an die Stelle von (2) tritt eine durch den Unterteilungsmechanismus bedingte Kurve der Art (2′) in Fig. 20. Wenn man nun be-

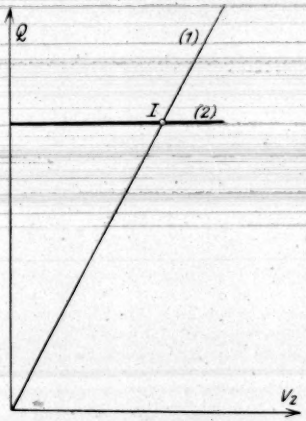


Fig. 19.

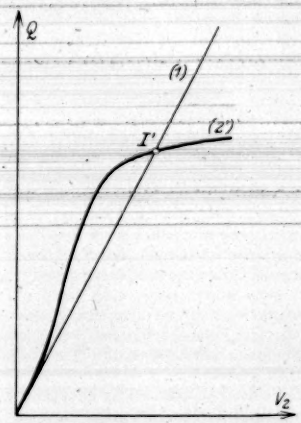


Fig. 20.

achtet, daß sowohl die Neigung der Geraden (1) als auch der Verlauf von (2′) von den Betriebsbedingungen, der letztere insbesondere auch von V_a abhängt, erkennt man sofort, daß in diesem Falle die Lage des stationären Zustandes (I′) bzw. die Größe der stabilen Amplitude V_2 von dem Anodenpotential beeinflußt sein muß. Es ist wohl sofort klar, daß die Kurven (1) und (2′) hier eine ähnliche Rolle spielen wie Rückkoppelungsgerade und Schwingkennlinie bei der gewöhnlichen niedriger frequenten Arbeitsweise der Röhre[15]). Unsere Theorie, die nur den eingeschwungenen Zustand, nicht die Anlaufbedingungen erfaßt, muß hier notwendig versagen.

Eine Berechnung der Kurve (2′) wäre aber auch zwecklos, solange nicht ein anderer weit wichtigerer Punkt geklärt ist. Es muß vor allem die bisher vernachlässigte Wechselspannung zwischen Glühdraht und Gitter und die damit zusammenhängende, unter Umständen hinzukommende B.- bzw. S.-Schwingung berücksichtigt werden. Eine theoretische Klärung dieser Frage dürfen wir aber nach einer Ankündigung von W. I. Romanoff durch das Moskauer Institut erwarten.

VII. Zusammenfassung und Schluß.

Es wurde in dieser Arbeit der Versuch gemacht, die Entstehungsweise der sog. „Gill-Morell"-Schwingungen in einer Theorie zu entwickeln, die ausgehend von einer Influenzwirkung der in der Röhre bewegten Elektronen, sowohl die Vorgänge in der Röhre als auch diejenigen im äußeren Schwingungskreis gleichzeitig in einheitlicher Weise erfaßt. Dabei gelang es einerseits den Einfluß der Dämpfung auf den Vorgang abzuschätzen, andererseits die bisher gleichfalls noch nicht geklärte Abhängigkeit der Wellenlänge von der Gitterspannung bei unverändertem Außenkreis aus der Theorie

15) H. G. Möller, „Die Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen". Sammlung Vieweg. 49. 2. Aufl.

zu errechnen und eine qualitative Übereinstimmung mit einschlägigen experimentellen Beobachtungen zu erzielen. Darüber hinaus kommt der hier an einem Spezialfall (Annahme totaler Unterteilung an der Anode) entwickelten Betrachtungsweise allgemeinere Bedeutung zu, insofern sie sich auch auf andere Mechanismen periodischer Ladungsbewegung nach Ermittelung der jeweiligen Fourierkoeffizienten (A_1, B_1) bzw. der zugehörigen Funktionen (Y und Z) übertragen ließe*).

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Würzburg ausgeführt. In den Jahren 1925/26 beschäftigte sich der Verfasser mit experimentellen Untersuchungen, die einerseits die Verkürzung der Wellenlänge, andrerseits die Klärung des Zusammenhangs zwischen Außenkreis und Elektronenmechanismus zum Ziele hatten. Zunächst gelang es mit der Holbornschen Gegentaktschaltung[16]) durch Verwendung kapazitätsarmer Röhren im Betriebe ($V_a \gg V_g$) die Wellenlänge auf 120 cm zu erniedrigen. Der Übergang zu dem für die weitere Verkürzung der Welle günstigeren Barkhausenschen „Bremsfeldbetrieb" ($V_a \ll V_g$) konnte unmittelbar an dieser 2-Röhrenschaltung gemacht werden. Der Ersatz der einen Röhre durch einen sehr kleinen, veränderlichen bzw. durch einen großen festen Kondensator führte zur Marconi- bzw. schließlich zur G.-M.-Schaltung (l. c. S. 464). Die kürzeste im Falle $V_a \ll V_g$ erreichte Wellenlänge betrug 45 cm. Die weitere Verkürzung der Welle hätte Spezialkonstruktionen besonders kapazitätsarmer Röhren erfordert, wozu die Mittel nicht vorhanden waren. Im Gegensatz zu mancher früheren Beobachtung war das Zustandekommen dieser Schwingungen nicht sonderlich von der Röhrentype abhängig; insbesondere konnten auch bei ebener Elektrodenform Schwingungen dieser Art erhalten werden. Ferner zeigte sich, daß die Wellenlänge — es handelte sich dabei immer um G.-M.-Schwingungen — in erster Linie durch den von der Röhrenkapazität und den Außenleitern gebildeten Schwingungskreis bestimmt war; im Gegensatz zu den S.-Schwingungen konnte also bei konstantem Außenkreis die Gitterspannung in ziemlich weiten Grenzen variiert werden, ohne daß eine beträchtliche Änderung der Wellenlänge auftrat (siehe die „Stufen" oben!). Es erübrigt sich, auf alle diese Voruntersuchungen einzugehen, da sie durch weitergehende Veröffentlichungen von A. Scheibe[14]) und M. T. Grechowa[2]) überholt wurden. Für die Fortführung der experimentellen Untersuchung konnten die erforderlichen Hilfsmittel erst allmählich beschafft werden, andrerseits erschien der mathematische Ausbau einiger an die bisherigen experimentellen Ergebnisse geknüpften Vermutungen und Überlegungen im Hinblick auf die Gewinnung schärferer Fragestellungen wünschenswert. Es wurde deshalb einstweilen vorliegende theoretische Arbeit durchgeführt. Die Fortführung der experimentellen Untersuchung ist in Angriff genommen.

Zum Schlusse möchte ich vor allem Herrn Prof. Dr. F. Harms für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie sein stetes Interesse, für seine wertvolle Kritik bei der Sichtung der zahlreichen theoretischen Möglichkeiten, endlich für die Bereitstellung eigener Apparate zu einer ersten experimentellen Orientierung meinen aufrichtigsten und wärmsten Dank zum Ausdruck bringen. Ferner bin ich für die Überlassung einiger Apparate Herrn Prof. Dr. E. Wagner zu Dank verpflichtet.

Bei der experimentellen Voruntersuchung konnten Mittel, welche vom Elektrophysikausschuß der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft bewilligt waren, benutzt werden, wofür auch an dieser Stelle bestens gedankt werden möge.

Weiter sei bestens gedankt der Marconi Osram Valve Co. London, sowie dem Radioröhrenlaboratorium Nishnij-Nowgorod, welche in freundlicher Weise für diese Versuche einige besonders geeignete Röhren kostenlos zur Verfügung stellten.

*) Nachtrag bei der Korrektur: Durch das Entgegenkommen von Herrn Prof. Dr. Rau ist mir eine inzwischen in den Ann. d. Phys. **86**, 129, 1928 erscheinende Experimentalarbeit von H. Hollmann zugänglich geworden. Diese liefert den klaren Nachweis, daß nicht nur in dem in vorliegender Arbeit ausschließlich behandelten Fall $V_a \sim 0$, sondern auch im Falle merklich negativer Anode in gewissen Gebieten eine starke Beeinflussung der Wellenlänge λ durch die Länge (l) der Außenleiter eintritt. Die dort angegebenen Kurven $\lambda = f(l)$ lassen erkennen, daß es sich auch in diesem Falle, wie es schon von K. Kohl (l. c. S. 449) vermutungsweise ausgesprochen wurde, um zwei miteinander gekoppelte Systeme: Elektronenmechanismus und Außenkreis handelt. Es ergibt sich also die Möglichkeit und Notwendigkeit die oben entwickelte Theorie auf die auch praktisch besonders wichtigen B-Schwingungen auszudehnen, möglichst unter Verzicht auf die Annahme kleiner Amplituden und geringer Frequenzänderungen. Das kann offenbar in der Weise geschehen, daß die Influenzwirkung der nach der Barkhausenschen Vorstellung um das Gitter pendelnden Elektronen berücksichtigt und die in bekannter Weise aus den Flugzeiten im Gesamtraume „Kathode-Anode" ermittelte Periode als „Eigenperiode des Elektronenmechanismus" in die Rechnung eingeführt wird.

16) F. Holborn, Zeitschr. f. Phys. **6**, 328, 1922.

Würzburg, Physikal. Institut d. Universität, im März 1928.

(Eingegangen 31. März 1928.)

Radioaktive Niederschläge auf Hochantennen.

Von F. Schindelhauer.

Befindet sich ein geerdeter Leiter von der Kapazität C im elektrischen Felde der Erde, so ist er mit einer Elektrizitätsmenge Q geladen, welche bestimmt ist durch die Gleichung

$$\frac{Q}{C} + V = 0, \qquad (1)$$

wo V das Potential an der Stelle ist, an welcher sich der Leiter befindet. Bei normalem Zustande des Erdfeldes trägt der Leiter negative Oberflächenladung. Durch den erdenden Draht fließt ein Strom, sobald

1. das elektrische Feld sich ändert. Die Stromstärke beträgt alsdann $C\frac{dV}{dt}$.
2. die Oberflächenladung des Leiters durch Ionisation an die ihn umgebenden Luftteile abgegeben wird.

Am Observatorium Potsdam sind Beobachtungen des unter 2 angegebenen Stromes angestellt worden. Über einige Versuche in dieser Richtung ist schon in dieser Zeitschrift berichtet[1]). Als geerdete Leiter werden Hochantennen benutzt, in deren Erdleitung ein Meßinstrument liegt. Bei der Fortsetzung dieser Versuche ist der Ausgleichstrom einige Monate lang photographisch aufgezeichnet worden. Über die Ergebnisse dieser Versuche soll hier berichtet werden. Meist ist ein Drehspul-Spiegelgalvanometer als Meßinstrument benutzt worden. Als Elektroden dienen die in der früheren Untersuchung (a. a. O.) beschriebenen beiden Schirmantennen, die in 6 m bzw. 30 m Höhe angebracht sind, ferner eine etwa 120 m lange L-Antenne in ungefähr 35 m Höhe. Die Kapazitäten dieser Antennen weichen nicht erheblich voneinander ab, sie betragen

für die Niedrigantenne	$C = 1240$ cm
„ „ Hochantenne	$C = 1220$ cm
„ „ L-Antenne	$C = 1020$ cm.

Da immer nur ein Meßinstrument für diese Versuche zur Verfügung steht, so wird mit den beiden Schirmantennen nacheinander gearbeitet, die Umschaltung auf eine andere Antenne geschieht alle 2 Stunden oder in längeren Intervallen.

Die Antenne wird über das mit einem passenden Nebenschluß versehene Galvanometer hinweg geerdet. Die Messung ist richtig, sobald der Erdungswiderstand klein ist gegenüber den Isolationswiderständen. Die Registriertrommel hat 24stündigen Umlauf. Die Auswertung der erhaltenen Kurven geschieht in der Weise, daß Stundenmittelwerte abgelesen werden. Dann werden aus ihnen Tages- und Monatsmittelwerte errechnet, — endlich mehrere Monate zusammengefaßt. Für die Berechnung der Tagesmittel wird nicht der Zeitraum von Mitternacht bis Mitternacht, sondern von 8^h morgens bis 8^h des nächsten Tages gewählt; hauptsächlich deswegen, weil 8 a Beobachtungstermin am Potsdamer Observatorium ist (Ablesung der Bodenthermometer), das Auflegen des neuen Bogens auf den photographischen Registrierapparat geschieht ebenfalls um 8 a.

Es ergeben sich dabei für zwei aufeinanderfolgende Jahre folgende Mittelwerte für die 4 Beobachtungsperioden:

I. Juni, Juli, August L-Antenne $2{,}08\ 10^{-8}$ Amp. (26 Tage),
II. Nov., Dez., Hochantenne 14,23, Niedrigantenne 1,39 (24 Tage),
III. Januar, Febr., Hochantenne 1,15, Niedrigantenne 1,54 (20 Tage),
IV. Mai, Juni Hochantenne 17,43 (14 Tage).

Die Werte sind auffallend niedrig in Periode I und III. Periode II unterscheidet sich von der unmittelbar folgenden Periode III durch hohe und sehr wechselnde Temperaturen und Nichtvorhandensein einer Schneedecke von längerer Dauer. Während Periode III ist die Schneedecke fast dauernd sehr hoch und die Temperaturen auch in der ersten Hälfte des Februar niedrig. Im ganzen läßt sich sagen, daß die Werte des Ausgleichstromes im heißen Sommer und kalten Winter niedrig sind, dagegen sehr hoch im Frühjahr bei Erwärmung des Bodens. Bemerkenswert ist das Verhalten der Niedrigantenne in den beiden Perioden II und III. Die Periode III begünstigt das Auftreten von Bodeninversionen, von unmittelbar dem Erdboden aufliegenden kalten Luftschichten, in denen jede Austauschbewegung mit höheren Schichten fast völlig unterbleibt. In meiner früheren Untersuchung habe ich versucht, das Verhalten des Ausgleichstromes dadurch zu erklären, daß ich einen radioaktiven Niederschlag auf der negativ elektrischen Antenne angenommen habe. Die durch Bodenatmung aus dem Erdboden austretenden Emanationen streichen an der Antenne vorbei, wenn sie durch Luftaustausch in die Höhe geführt werden und lagern auf dem negativen Sammlerdraht einen aktiven Niederschlag ab. Bei der Ausbildung von Bodeninversionen muß das gesamte radioaktive Gas über der Erdoberfläche liegen bleiben und kann nicht in größere Höhen gelangen. So erklärt sich der hohe Wert des Ausgleichstromes in der Niedrigantenne in Periode III. Ist die obige Erklärung richtig, so muß der Ausgleichstrom hauptsächlich abhängig sein von Luftdruckänderungen, von der Erwärmung des Bodens, vom elektrischen

1) Physik. Zeitschr. **23**, 36—39, 1922.

Felde, in dem sich die Antenne befindet und endlich von den Faktoren, die den Austausch begünstigen oder hemmen.

1. Luftdruck. Nach den Registrierungen des Laufgewichtsbarographen Sprung[1]) werden die Werte der stündlichen Änderung des Luftdrucks für diejenigen Zeiten ermittelt, für welche Aufzeichnungen des Ausgleichstromes vorliegen. Dann werden hieraus Tagesmittel (8 a—8h) der stündlichen Luftdruckänderung gebildet, welche also genau den Tagesmitteln des Ausgleichstromes entsprechen. Es werden Stufen des fallenden und steigenden Luftdrucks abgeteilt und die zugehörigen Werte des Ausgleichstromes für jede Stufe gemittelt. So ergibt sich für die Stufen:

Tabelle I.

Luftdruckänderung . . .	+ 3 — + 1 mm	+ 1 — 0 mm	0 — — 1 mm	— 1 — — 2 mm	— 2 — — 4 mm
	steigen		fallen		
Ausgleichstrom	2,6	2,5	6,1	16,0	21,2 · 10⁻⁸ Amp.

Also fallender Luftdruck ergibt weit höhere Stromwerte als steigender Druck, weil bei fallendem Barometer die Emanation aus dem Boden ausgeblasen wird. Die Zahlen der letzten Stufen sind mit einem ziemlich hohen mittleren Fehler behaftet, weil die Anzahl der Beobachtungen noch zu gering ist. Es kommt ja hier aber nur darauf an, den allgemeinen Funktionsverlauf ungefähr festzulegen. Die obigen Zahlen gelten für die Hochantenne. Für die Niedrigantenne ergibt sich:

	steigend	fallend
Luftdruckänderung	+ 3 — 0	0 — — 4 mm
Ausgleichstrom	1,88	2,44 · 10⁻⁸ Amp.

Also wiederum ein deutlicher Anstieg des Stromes mit fallendem Barometer.

Dieses Resultat gilt für aperiodische Luftdruckänderungen. Der tägliche Gang des Barometers macht sich im Verlauf des Ausgleichstromes (s. weiter unten) nicht in derselben Weise bemerkbar. Vielmehr laufen hier die Kurven manchmal durchaus parallel.

2. Bodentemperatur. Die Bodenatmung hängt ferner von den Temperaturänderungen im Boden ab. Sieht man von größeren Tiefen ab, so muß bei steigender Temperatur während des Tages die emanationshaltige Luft der oberen Schichten ausgetrieben werden. Die Erscheinung wird sich allerdings dadurch komplizierter gestalten, daß eine Wechselwirkung der verschiedenen Schichten sich ergibt.

Von einer näheren Untersuchung ist zunächst bei dem geringen zur Verfügung stehenden Material abgesehen worden.

Im Jahresgange wird der Einfluß der Bodentemperaturänderung so zur Geltung kommen, daß im Frühjahr bei steigender Erwärmung der mit Emanation angereicherten Schichten große Mengen von aktivem Niederschlag auf der Antenne angesammelt werden. So erklärt sich der hohe Wert des Ausgleichstromes in Periode IV (Mai—Juni) von 17,4 · 10⁻⁸. Im Hochsommer scheint dagegen der Boden nicht so viel Emanation nachliefern zu können wie durch den sehr großen Luftaustausch vom Erdboden in die höheren Luftschichten abtransportiert wird. Die Luft in der Umgebung der Antenne ist daher arm an radioaktiven Gasen (Periode I: 2,1 · 10⁻⁸ Amp.). Den Einfluß der aperiodischen Änderungen der Bodentemperatur erhält man in ähnlicher Weise wie den der Luftdruckänderungen. Es stehen aber nur zweimal tägliche Ablesungen der Bodenthermometer (um 8h und 14h) zur Verfügung. In Tabelle II ist die Änderung der Bodentemperatur von 8 ah bis 8h des folgenden Tages untersucht, die Tagesmittelwerte des Ausgleichstromes sind ja für den gleichen Zeitraum berechnet. Tabelle II zeigt demnach die Abhängigkeit dieser Tagesmittel des Ausgleichstromes von der Änderung der Bodentemperaturen in den Tiefen 2, 5, 10 und 20 cm für die gleiche Zeit; und zwar sind lediglich 2 Stufen: negative und positive Änderung gewählt worden. Die Perioden II und III (Nov., Dez., Jan., Febr.), sowie I, IV (Mai, Juni, Juli, August)

Tabelle II.

Abhängigkeit des Ausgleichstroms von der Änderung der Bodentemperatur (8 a—8 a) in verschiedenen Tiefen.

Tiefe m	Beob. Perioden	Ausgleichstrom bei fallender Temperatur	Ausgleichstrom bei steigender Temperatur
0,02	II. III	2,0	6,8 · 10⁻⁸ Amp.
	I. IV	2,1	6,0
0,05	II. III	2,2	7,6
	I. IV	1,5	5,8
0,10	II. III	2,4	6,3
	I. IV	4,6	6,4
0,20	II III	2,4	6,0
	I. IV	6,2	4,5

[1]) Sprung, Ergebn. d. Met. Beob. in Potsdam. J. 1893. Berlin 1895.

Tabelle III.

Temperaturänderung 8^h—8^h und 8^h—14^h in verschiedenen Bodentiefen für Stufen des Ausgleichstromes (Mittelwerte 8^h—8^h).

Tiefe m	Beob. Periode	Ausgleichstrom Temperaturänderung 8^h—8^h 0—1	1—5	$5 \cdot 10^{-8}$ Amp.	Ausgleichstrom Temperaturänderung 8^h—14^h 0—1	1,5	$5 \cdot 10^{-8}$ Amp.
0,02	II. III	$-0^0,6$	$-1,0$	$+1,5$	2,8	3,6	5,4
	I. IV	$+0,1$	$+1,0$	$+1,2$	15,9	14,3	10,7
	Mittel	$-0,2$	$-0,1$	$+1,4$			
0,05	II. III	$-0,6$	$-1,1$	$+1,5$	2,8	3,2	5,0
	I. IV	$+0,0$	$+1,2$	$+1,1$	13,3	11,4	9,1
	Mittel	$-0,3$	$+0,0$	$+1,3$			
0,10	II. III	$-0,7$	$-0,9$	$+1,5$	2,2	2,6	4,1
	I. IV	$-0,3$	$+1,5$	$+0,4$	8,6	9,8	7,2
	Mittel	$-0,5$	$+0,2$	$+0,6$			
0,20	II. III	$-0,2$	$-0,8$	$+0,8$	0,8	1,1	1,4
	I. IV	$-0,0$	$+1,4$	$-0,1$	4,8	5,8	4,4
	Mittel	$-0,1$	$+0,2$	$+0,3$			
0,50	II. III	$-0,1$	$-0,1$	$-0,3$			
	I. IV	$-0,2$	$+0,9$	$-0,1$			
	Mittel	$-0,2$	$+0,3$	$-0,2$			

sind jedesmal zusammengefaßt worden. Bei steigender Temperatur ist der Ausgleichstrom im Mittel etwa 3mal größer. In 20 cm Tiefe stimmt die Sache im Sommer aber nicht mehr (Periode I, IV); vielmehr ist hier der Ausgleichstrom bei steigender Temperatur kleiner. Hier bieten sich zwei Erklärungsmöglichkeiten: 1. die starke Verzögerung der Phase, in 20 cm Tiefe fällt das Maximum auf 17^h (gegen 14^h in 10 cm)[1]). 2. Die bereits erwähnte Möglichkeit des Austauschs nach unten. Durch die starke Erwärmung der oberen Bodenschichten wird die Emanation auch gegen die tieferen Schichten getrieben, welche eine Phasenverzögerung um 90^0 haben, deren Gaseinschlüsse also ihr Volumen verkleinern. Bei der kurzen Dauer der Nächte können sich die oberen Schichten nicht genügend mit Emanation frisch versorgen.

In Tabelle III sind die mittleren Änderungen der Bodentemperaturen berechnet, welche verschiedenen Werten des Ausgleichstromes entsprechen. Die ersten drei Vertikalreihen geben die Änderung der Bodentemperatur von 8^a bis 8^h. Fast durchweg werden die größten Stromwerte durch die größten Temperaturanstiege hervorgerufen, nur in der Tiefe 50 cm nicht mehr. Bereits in 20 cm tritt das Gesetz im Sommer außer Kraft. Noch besser erscheinen die besonderen Verhältnisse des Sommers im zweiten Teile der Tabelle III, welcher die Temperaturänderung von 8—14^h — also ungenau ausgedrückt — die Amplitude des täglichen Ganges der Bodentemperatur angibt. Im Winter bewirkt in sämtlichen Tiefen die größte Temperaturamplitude auch die größten Stromstärken, während im Sommer gerade in geringen Tiefen das Verhältnis sich am deutlichsten umkehrt. Durch die sehr starke Erwärmung der oberen Schichten wird eben die hier befindliche Emanation sehr schnell nach oben getrieben. Ein Nachschub aus tieferen Schichten findet aber nicht statt wegen des in den oberen Schichten herrschenden Überdrucks. Ferner ist im Sommer der günstigste Wert des Austausches überschritten, die Emanation wird in größere Höhen geschafft und die Konzentration in der Umgebung der Antenne bleibt gering.

3. Potentialgefälle. Ist η die Ladung des exponierten Leiters pro Längeneinheit, so fließt durch die an ihn heranfliegenden Ionen entgegengesetzten Vorzeichens der Strom $4\pi\eta nev$ zur Erde ab, wo n die Anzahl der Ionen in der Volumeinheit und v ihre Beweglichkeit ist. Das gleiche Gesetz gilt für radioaktive Träger; die Zahl der auf der Längeneinheit niedergeschlagenen A-Atome ist[1]):

$$m = 4\pi u \eta N .$$

Es muß also sowohl die Anzahl der aufgefangenen Ionen wie die der A-Atome mit der

1) Süring, Der tägliche Temperaturgang in geringen Bodentiefen, Abh. d. Pr. Met. Inst. Bd. V, Nr. 6, 1919.

1) Swann, Terr. Magn. **19**, 76, 1914; Meyer u. Schweidler, Radioaktivität II. Aufl. 1927, S. 582.

Tabelle IV.

Potentialgefälle und Ausgleichstrom (Tagesmittel).

Beobachtete Periode	Potentialgefälle			
	0—100	100—200	200—300	300—400 V.
II. III	—	1,45	1,60	7,03
I. IV	1,26	6,02	13,65	
Hochantenne Mittel	1,26	4,61	3,61	7,03
Niedrigantenne	—	0,70	1,59	3,00

Ladung des Sammlerdrahts, d. h. nach Gl. (1) mit der Feldstärke zunehmen.

Das Potentialgefälle wird in Potsdam laufend auf der Wiese mit einem Benndorf-Elektrometer aufgezeichnet[1]) und es werden Mittelwerte für jede Stunde ausgewertet. Für die vorliegende Untersuchung wird angenommen, daß die dort gemessenen Feldstärkeänderungen denjenigen proportional sind, die in der Umgebung des Sammlerdrahtes stattfinden. Bei Feststellung des aperiodischen Verlaufs sind die Tagesmittel in derselben Weise und für die gleichen Zeiträume (8^h—8^h) berechnet worden wie die des Ausgleichstroms. Tabelle IV zeigt die Zusammenstellung dieser Ergebnisse nach Stufen des Potentialgefälles geordnet. Die Stromwerte steigen in der Tat mit zunehmender Feldstärke, aber weniger als erwartet. Nur bei der Niedrigantenne scheint ziemliche Proportionalität mit der Feldstärke zu herrschen. Anschaulicher ergibt sich der Einfluß der Feldstärke bei der Untersuchung des täglichen Ganges (s. unten).

4. Windgeschwindigkeit. Bei gleichbleibendem Gehalte der Luft an Emanation sollte nach der Formel von Swann die Menge der auf den Sammlerdraht niedergeschlagenen *A*-Atome von der Windgeschwindigkeit unabhängig sein. Bei den Schirmantennen sollte auch die Windrichtung ohne Einfluß sein. In der Tat wird nun aber durch Austauschvorgänge der Gehalt der unteren Schichten an radioaktiven Gasen beträchtlich geändert. Besonders große Schwankungen zeigen sich unmittelbar über dem Boden, weil hier die kurzlebigen Thoriumprodukte in die Erscheinung treten können, sobald der Austauschkoeffizient[2]) einen bestimmten Wert überschreitet. W. Schmidt und F. Heß haben unter der Annahme eines bestimmten Austauschkoeffizienten die Höhenverteilung der Emanationen und Zerfallsprodukte berechnet[3]).

Die Austauschwerte in der Nähe der Erdoberfläche unterliegen nun zweifellos außerordentlich großen Schwankungen im Laufe des Tages sowohl wie in größeren Zeiträumen. Mit ihnen ändert sich auch die Menge und Art der in der Umgebung der Sammlerdrähte vorhandenen Emanation, so daß der Vorgang ziemlich kompliziert ist. Es kann sich hier bei diesen Messungen, die lediglich als Vorversuche zu betrachten sind, nur darum handeln, den Einfluß der den Austausch bestimmenden Faktoren in großen Zügen zu untersuchen. Zweifellos ist es aber möglich mit Hilfe ähnlicher quantitativ eingerichteter Versuche den Austauschkoeffizienten aus dem Gehalt an radioaktiven Substanzen mit ziemlicher Genauigkeit zu ermitteln, während andere gebräuchliche Methoden unmittelbar über der Erdoberfläche versagen dürften. Ein besonders empfindliches Reagens würden dann die *Th*-Produkte für diese kleinen Austauschkoeffizienten abgeben.

Der Austausch nimmt mit der Windgeschwindigkeit zu, die Turbulenzelemente nehmen an Größe zu[1]). Für den vorliegenden Zweck sind die Registrierungen des auf dem großen Turme des Observatoriums über der Hochantenne angebrachten Schalenkreuzanemometers verwendet worden. Seine Angaben sind wiederum für die gleichen Zeiträume, für die Stromwerte vorhanden sind, zu Tagesmitteln vereinigt. Die erhaltenen Werte sind in Tabelle V nach Stufen der Geschwindigkeit angeordnet und die zugehörigen Werte des Ausgleichstroms berechnet.

Tabelle V.

	1—3	3—4	4—6	6—10 skm
Hochantenne	3,7	14,1	9,7	$2{,}9 \cdot 10^{-8}$ Amp.
Niedrigantenne	0,8		2,9	1,2

Der Ausgleichstrom steigt zunächst mit zunehmender Windgeschwindigkeit, d. h. mit zunehmendem Austausch. Zweifellos wird auch der Atmungsprozeß des festen Bodens mit zunehmender Turbulenz angeregt. Sobald der

1) Ergebn. d. Beobachtungen in Potsdam.

2) W. Schmidt, Der Massenaustausch in Luft und verwandte Erscheinungen, Hamburg 1925.

3) V. F. Heß u. W. Schmidt, Über die Verteilung radioaktiver Gase in der freien Atmosphäre. Physik. Zeitschr. **19**, 109, 1918. W. Schmidt, Zur Verteilung rad. Stoffe in der freien Luft, Physik. Zeitschr. **27**, 371, 1926.

1) W. Schmidt, Massenaustausch S. 99.

Austausch aber einen großen Wert überschreitet, nimmt der Gehalt der Luft an Emanation in der Nähe des Sammlerdrahtes wieder ab, die Emanation wird dann gleich in größere Höhen geschafft.

Windrichtung. Die Vergleichung der Windrichtung mit den Stromwerten wird wiederum auf die entsprechenden Zeiträume erstreckt unter Zugrundelegung der stündlichen Mittelwerte. Es wird die Häufigkeit des Vorkommens der 4 Quadranten für jedes Tagesmittel des Ausgleichstromes berechnet. Dann werden die Strommittelwerte in 3 Stufen eingeteilt (0 bis $1 \cdot 10^{-8}$ Amp., $1-5 > 5 \cdot 10^{-8}$ Amp.). Für jede Stufe wird die Häufigkeit des Vorkommens der 4 Quadranten errechnet. Dann ergibt sich folgendes Bild:

Tabelle VI.

Ausgleichstrom für verschiedene Windrichtungen.

	N	E	S	W
0—1 · 10^{-8} Amp.	17	30	20	33
1—5	13	31	24	31
5	15	12	25	48

(Die Zahlen geben die Häufigkeit des Vorkommens des betr. Quadranten in Prozenten an.)

Man sieht, daß bei geringeren Stromstärken eine nennenswerte Bevorzugung einer Richtung nicht vorkommt. Erst größere Stromstärken bevorzugen die W-Richtung.

Weiter wird der Ausgleichstrom für die verschiedenen Windrichtungen berechnet. Es werden die Richtungen NW, N, NE zu einem N-Quadranten, NE, E, SE zum E-Quadranten usw. zusammengefaßt. Dann ergeben sich als Mittelwerte des Ausgleichstroms für die verschiedenen Richtungen:

N	E	S	W
2,0	2,4	5,9	5,9—10^{-8} Amp.

Die größten Stromstärken ergeben sich also bei Winden aus südlichen und westlichen Richtungen. Irgendeine physikalische Bedeutung kommt diesem Resultate wohl nicht zu. Es bestätigt lediglich, daß (nach Tab. I) mit fallendem Luftdruck, also Herannahen eines Tiefdruckgebietes und damit Einsetzen von südwestlichen Winden Emanation aus dem Boden entlassen wird, womit der aktive Niederschlag auf dem Sammlerdraht zunimmt.

Bewölkung. Für die Bewölkung liegen in Potsdam zweistündliche Beobachtungen vor. Die Zusammenstellung der gleichzeitigen Beobachtungen des Ausgleichstromes ergibt folgendes (die Bewölkung nach Stufen geordnet):

Tabelle VII.

	Bewölkung 0—4	4—8	8—10
Hochantenne	4,9	3,8	3,3
Niedrigantenne	0,6	1,6	6,4 · 10^{-8} Amp.

In der Hochantenne fließen bei geringer Bewölkung die größten Stromstärken, während es in der Niedrigantenne gerade umgekehrt ist. Offenbar wird wohl durch Bestrahlung der Erdoberfläche die Emanation sehr ausgiebig in die Höhe geführt, so daß in der Umgebung der Niedrigantenne der Gehalt gering gehalten wird. Dagegen bleibt bei starker Bewölkung das radioaktive Gas in geringer Höhe liegen.

Temperaturgefälle. Der Vorgang des Emporhebens der Emanation von der Erdoberfläche zu den Sammlerdrähten ist nur möglich, wenn die Temperaturen unmittelbar über der Erdoberfläche größer sind als oben. Ist das Temperaturgefälle umgekehrt, so lagert unten eine stabile Schicht, welche jeden Austausch verhindert. Das Vorhandensein einer solchen Bodeninversion läßt sich in Potsdam durch Vergleich der Temperaturbeobachtungen auf der Beobachtungswiese und auf dem großen Turme des Hauptgebäudes (Höhenunterschied etwa 30 m) feststellen. Hier werden die Temperaturen zweimal täglich (um 8^h und 14^h) abgelesen. Eine genauere Untersuchung ist mit dem vorhandenen geringen Beobachtungsmaterial nicht möglich, es können nur die Tagesmittel des Ausgleichstroms für negatives und positives Temperaturgefälle an den beiden Beobachtungsterminen angegeben werden (Tagesmittel für den um 8^h beginnenden Tag):

Temperaturgefälle	8^h	14^h
neg.	2,3	2,6 · 10^{-8} Amp.
pos.	6,7	5,4

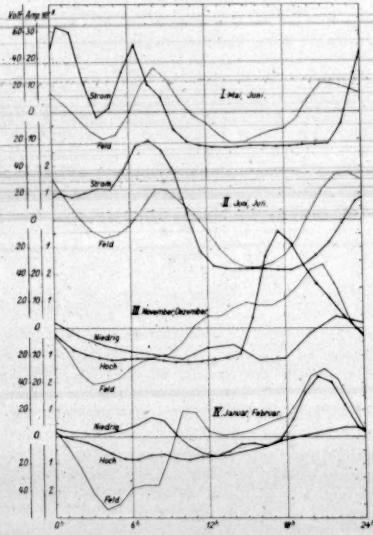
d. h. bei positivem Gefälle ist die Stromstärke 2—3mal größer als bei negativem Gefälle.

Frost. Schneedecke. Vielfach findet man die Angabe, daß gefrorener Boden die Abgabe von Emanation erheblich hindere oder unmöglich mache. Es ist nicht einzusehen, wie durch Gefrieren der oberen Schichten ein luftdichter Abschluß der Erdoberfläche erreicht werden soll. Eine Berechnung des Ausgleichstroms für positive und negative Werte der Bodentemperatur in 2 cm Tiefe (8^h) ergibt das umgekehrte Resultat, nämlich $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Amp. für positive und $3{,}8 \cdot 10^{-8}$ Amp. für negative Temperaturen. Berücksichtigt sind nur die Wintermonate Nov., Dez. (Periode II), Jan., Febr. (Periode III). Dagegen liegt der Einfluß einer Schneedecke klar am Tag. Er be-

wirkt den großen Unterschied zwischen Beobachtungsperiode II und III. Eine besondere Auswahl der Tage mit und ohne Schneedecke für diesen Zeitraum ergibt folgende Mittelwerte für den Ausgleichstrom:

Tage mit Schneedecke $0{,}89 - 10^{-8}$
Tage ohne Schneedecke 5,0.

Es ist aber auch hier kaum anzunehmen, daß die Durchlässigkeit des Bodens durch die Schneedecke in irgendeiner Weise behindert wird. Nur



werden einerseits die Temperaturschwankungen im Erdboden erheblich verkleinert, andererseits wird der Luftaustausch behindert, da die Schneedecke eine Erwärmung des Bodens verhindert und Entstehen und Verharren von Bodeninversionen begünstigt.

Täglicher Gang. In den Fig. 1—4 sind die täglichen Gänge des Ausgleichstromes und des Potentialgefälles wie sie aus stündlichen Mittelwerten sich ergeben, dargestellt, und zwar für jede Beobachtungsperiode besonders. In Fig. 3 und 4 sind auch die während der gleichen Zeiträume in der Niedrigantenne registrierten Stromwerte aufgetragen, und zwar in 4 in demselben Maßstabe, wie die der Hochantenne, während in 3 der Maßstab der Hochantenne 10mal verkleinert werden mußte. Als „Feld" ist der Gang des Potentialgefälles nach den Aufzeichnungen auf der Wiese in geringer Höhe über dem Boden eingezeichnet. Überall sind Abweichungen vom Mittelwert dargestellt.

Der unter der Einwirkung des normalen elektrischen Feldes fließende Strom, welcher als luftelektrischer Vertikalstrom aus der Atmosphäre in eine über die Erdoberfläche hinausragende Elektrode fließt, setzt sich aus 2 Komponenten zusammen: 1. den positiv geladenen Rückstoßatomen, welche sich auf dem negativ geladenen Sammlerdraht niederschlagen, 2. den durch Zerfall dieses radioaktiven Niederschlags gebildeten Trägern positiven Vorzeichens. Außerdem sind noch Träger da, die durch andere Ionisatoren gebildet werden, sie kommen aber, wie gleich gezeigt werden wird, wenig in Betracht.

Für die in Potsdam verwendete Höhe der Sammlerdrähte (6 und 30 m) kommt hauptsächlich Radiumemanation als diejenige in Betracht, welche A-Atome absetzt. Nach Wilhelm Schmidt[1]) ist bereits in 5 m Höhe keine Thoriumemanation mehr vorhanden, wenn der Austausch in 100 m Höhe $A = 50$ abs. Einh. gesetzt wird und eine Abhängigkeit des A von der Höhe z nach der Funktion $A = A_0 \cdot z^{1/2}$ [2]) angenommen wird. Freilich liegt die Sache hier in Wirklichkeit nun so, daß das A in den unteren Schichten einen beträchtlichen täglichen Gang aufzuweisen hat, so daß zur Zeit der größten Erwärmung des Bodens und der unteren Luftschichten das A einen vielfach höheren positiven Wert als den theoretisch berechneten erreichen wird. Dagegen wird A nachts Null werden. Am Tage wird also die Emanation in so beträchtlicher Menge nachgeliefert werden, daß die Zufuhr die Abfuhr bei weitem übersteigt (von horizontalem Transport abgesehen), während nachts überhaupt keine Zufuhr vorhanden ist. Außerdem ist, wie schon wiederholt bemerkt, die Sache so, daß A einen günstigsten Wert erreicht, wenn es über diesen Wert steigt, so wird der Gehalt an Emanation in der Umgebung der Sammlerdrähte wieder geringer.

Meyer und Schweidler berechnen[3]), daß bei 24stündiger Periode der Zufuhr für Radiumemanation die Gehaltsänderung auf 2,9 Proz. der Amplitude der Zufuhränderung sinkt. Die zeitliche Verspätung, die die Gehaltsänderung gegenüber der Zufuhränderung erleidet, wird nahezu 6 Stunden.

Die Kurven des täglichen Ganges scheinen nun in der Tat eine Phasenverzögerung von angefähr dieser Größe anzudeuten. In Fig. 3 (Nov.-Dez.) wird das Maximum in der Hochantenne etwa um $17-18^h$ erreicht, in Fig. 4

1) Physik. Zeitschr. **27**, 375, 1926.
2) Massenaustausch S. 87.
3) Radioaktivität. II. Aufl. S. 589.

(Jan.-Febr.) um 20—21^h, also schon etwas später wegen des höheren Sonnenstandes und deswegen länger dauernden Emanationstransportes. Im Mai-Juni (Fig. 1) verspätet es sich bis Mitternacht; Juni-August ebenfalls. Im Sommer entsteht eine doppelte Welle, weil 2 Zufuhrperioden im Laufe des Tages vorhanden sind, eine morgens und eine abends, unterbrochen durch eine Periode sehr großen Austauschs (Abfuhr nach oben). Wegen der großen Tagesdauer ist diese Periode sehr lang und drängt die beiden Maxima weit auseinander, das erste tritt etwa um 7^h schon ein und wird zum Hauptmaximum.

Die Messungen des Ausgleichstroms in Antennen sind luftelektrische Vertikalstrommessungen beider Vorzeichen, angestellt an Elektroden, die weit in das Feld hineinragen. Überall werden solche hervorragenden Punkte der Erdoberfläche den Hauptteil des Stroms zur Erdoberfläche zurückführen. Absichtlich sind nur Schönwetterströme gemessen worden[1]), um Spitzenentladung zu vermeiden. Ein Vergleich mit den Kurven des aus Potentialgefälle und Leitfähigkeit berechneten Vertikalstroms[2]) zeigt, daß der Verlauf der Kurven ähnlich ist, die Maxima fallen auf die gleichen Zeiten. Die in der Niedrigantenne erhaltenen täglichen Gänge zeigen in ihrem Verlaufe keine wesentlichen Unterschiede von denen der Hochantenne. Die tägliche Schwankung ist erheblich geringer, weil die Schwankungen des Emanationsgehalts nicht so groß sind. Ferner verspätet sich das Maximum um 3—4 Stunden, weil die Zufuhr von unten in dieser geringen Höhe später aufhört. In der Tat bildet sich ja manchmal eine Sperrschicht zwischen den beiden Antennen aus.

Die Betrachtung der Kurven des Potentialgefälles lehrt, daß Strom und Feldstärke auffallend übereinstimmen und vollkommen in Phase sind[3]), es ist also unmöglich, den täglichen Gang durch Induktion zu erklären (nach $i = C\left(\frac{dV}{dt}\right)$. Das Maximum des Potentialgefälles um 21^h ist das auf der ganzen Erde gleichzeitig auftretende. Der Ausgleichstrom verspätet sich gegen dieses Maximum gewöhnlich; irgendein Zusammenhang kann hier wohl kaum bestehen; nur wird der Anstieg des Vertikalstromes steiler durch das gleichzeitige Ansteigen des Feldes. Anders steht es mit dem Morgenmaximum des Potentialgefälles, das im Sommer mit dem Maximum des Vertikalstroms zusammen plötzlich in die Erscheinung tritt (im Jan.-Febr. ist es schon angedeutet). Hier sieht man umgekehrt eine deutliche Verzögerung des Feldes hinter dem Strom. Es ist hier zwanglos der Feldanstieg durch den Anstieg des Kollektorstroms zu erklären. Dadurch müssen sich positive Raumladungen in ziemlich niedriger Höhe bilden. Der Austausch reicht morgens nicht bis in größere Höhen hinauf, infolgedessen stauen sich diese positiven Ladungen hier und verstärken das Feld.

Beim ersten Anblick der Feld- und Stromkurven könnte man meinen, daß das Verhalten des Stroms sich einfach durch Feldstärkeänderungen erklären ließe. Eine Betrachtung der Schwankungen beider Elemente zeigt sofort die Irrigkeit dieser Annahme. Die hier gemessenen Vertikalströme haben eine außerordentlich große Amplitude aufzuweisen. In Tabelle VIII ist das Verhältnis Schwankung/Mittelwert für die vorliegenden galvanometrischen Strommessungen, für die gleichzeitigen Feldstärken und drittens für die von Kähler[1]) aus Leitfähigkeit und Potentialgefälle errechneten Vertikalströme (in entsprechenden Monaten) zusammengestellt:

Tabelle VIII.

Beob. Periode	Ausgleichstrom	Potentialgefälle	Vertikalstrom
I	2,3	0,5	0,7
II	3,4	0,3	0,2
III	2,8	0,4	0,4
IV	2,6	0,4	1,0

Für die in Antennen gemessenen Vertikalströme ist dieses Verhältnis etwa 3, während es für das Potentialgefälle nur 0,4 beträgt. Versucht man den Einfluß der Feldstärke zu eliminieren, indem man die Stundenwerte des Stroms mit einem Reduktionsfaktor $\frac{Vm}{V}$ multipliziert (Vm mittleres Potential, V das zu dem betreffenden Stromwert gehörige), unter der Annahme, daß Ohmscher Strom herrscht, so gelangt man zu Stromwerten, welche sich von den nichtreduzierten fast gar nicht unterscheiden. Ein täglicher Gang von dieser Amplitude läßt sich nur durch das Auftreten von kurzlebigen *Th*-Produkten erklären. Die in der Niedrigantenne gemessenen Ströme sind gewöhnlich beträchtlich niedriger als die in der Hochantenne fließenden. Im Mittel müßten sie im Verhältnis der Feldstärken kleiner sein, die an der Hoch- bzw. Niedrigantenne

1) Vgl. dagegen: Wormell, Roy. Soc. Proc. A. Vol. 115, 443, 1927. Messung der Spitzenentladungen unter Gewitterwolken. Wahrscheinlich fließt der ganze Vertikalstrom während der kurzen Perioden der Feldumkehr bei Böen und Gewittern nach oben.

2) Kähler, Ergebn. der met. Beob. in Potsdam im Jahre 1911, S. XXVI.

3) s. a. Kähler a. a. O.

1) a. a. O.

herrschen. Dieses Verhältnis läßt sich leicht bestimmen, wenn man schnelle Feldänderungen in ihrer Wirkung auf die beiden Antennen betrachtet. Befindet sich in der Umgebung ein vollkommenes Dielektrikum, so ist im Gleichgewichtszustande

$$\frac{Q}{C} + V = \frac{Q}{C} + hf(t)\ ^{1}). \qquad (2)$$

Die Ladung Q ändert sich nur bei einer Änderung von V, wo V nur mit der Höhe h der Antenne proportional und im übrigen nur eine Funktion der Zeit ist. Alsdann fließt durch den Erdungswiderstand ein Strom und an den Enden des Widerstands W herrscht eine Spannung:

$$v = -W\frac{dQ}{dt} = WC\frac{dv}{dt} = hWCf'(t).^{2})$$

Bezeichnet man mit h_1 die wirksame Höhe der oberen, mit h_2 die der unteren Antenne, so ergibt sich

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{h_1 W_1 C_1}{h_2 W_2 C_2}; \qquad \frac{h_1}{h_2} = \frac{i_1 C_2}{i_2 C_1}.$$

Man braucht also nur für irgendeine schnelle Feldänderung die Stromstärken in den beiden Antennen zu messen und kann daraus die wirksamen Höhen berechnen. Aus 21 derartigen Messungen (es sind kurz aufeinander folgende, nicht gleichzeitige Messungen der Kurvenbreite vorgenommen worden) ergibt sich $\frac{h_1}{h_2} = 4{,}6$. In Wirklichkeit bekommt man für das Verhältnis der Ausgleichströme Hochantenne/Niedrigantenne in Beobachtungsperiode II: 10 in III: 0,75, d. h. in II hat die Niedrigantenne viel zu wenig Strom, weil die radioaktiven Gase durch lebhaften Austausch gleich nach oben geschafft werden; in III dagegen hat sie zu viel Strom, weil eine Sperrschicht zwischen den beiden Antennen liegt, welche bewirkt, daß die obere Antenne als Kollektor fast ganz ausgeschaltet wird, die Stromlinien münden jetzt meist unten ein, weil sie hier einen guten, aktiven Niederschlag vorfinden.

Die Messungen des Vertikalstroms in Antennen haben den Vorzug einer einfachen galvanometrischen Meßmethode und vor allem geben sie nicht einen Vertikalstrom, der bloß von einer Auswahl von Ionenarten herrührt, wie die indirekten Methoden. Sie haben aber den Nachteil, daß die Auffangfläche schwer zu bestimmen ist. Man kann versuchen, die Größe der Auffangfläche auf zweierlei Art zu schätzen: 1. Man denkt sich die Antenne ersetzt durch einen Plattenkondensator derselben Kapazität, dessen Plattenabstand gleich der mittleren Höhe der Antenne über dem Boden ist. Dann ergibt sich die Auffangfläche zu $A = 2\pi d \cdot C$. Nimmt man $d = 20$ m an, so ergibt sich für die

L-Antenne	$A = 2{,}5 \cdot 10^7$ cm^2
Schirmantenne	$A = 3{,}1 \cdot 10^7$ cm^2

2. Nach Dieckmann[1]) kann man den sog. Antennenluftquerschnitt einer Schirmantenne berechnen. Er ist gleich einer Kreisfläche, deren Durchmesser gleich der Höhe der Antenne ist. Nimmt man $h = 40$ m an, so ergibt sich $A = 1{,}2 \cdot 10^7$ cm^2, also bedeutend kleiner.

Legt man die nach 1 berechneten Werte für A zugrunde, so erhält man als gesamten Vertikalstrom pro Quadratzentimeter in der Beobachtungsperiode:

I	$0{,}8 \cdot 10^{-15}$ Amp.
II	4,6
III	0,4
IV	5,6

im Mittel etwa $3{,}10^{-15}$ also etwa 10mal soviel als die bisherigen Messungen ergeben haben. Es ist aber zu berücksichtigen, daß die Auffangfläche mit 3000 qm sicher erheblich überschätzt worden ist, die gemessenen Vertikalströme sind also noch bedeutend größer. Anscheinend hat man den Anteil am Vertikalstrom, den Dieckmann (a. a. O.) Kollektorstrom nennt, doch bedeutend unterschätzt. (Dieckmann unterscheidet: 1. Ausgleichstrom, d. h. Strom durch Ionisation der Luft, 2. Kollektorstrom, d. h. Strom durch radioaktive Niederschläge, 3. Hallwachsstrom, der bei den hier benutzten geschwärzten Drähten keine nennenswerte Rolle spielen kann.) Im ersten Teile dieser Arbeit ist gezeigt worden, daß es sich hier im wesentlichen nur um Kollektorstrom durch aktive Niederschläge handeln kann. Wenn Spitzenwirkung vorliegen würde, so könnte nicht der Strom beim Morgenmaximum im Sommer dem Potentialgefälle voreilen.

Gegen die Messungen in den beiden Schirmantennen könnte der Einwand erhoben werden, daß sie durch die Nähe des Gebäudes gefälscht wären. Dieser Einwand trifft aber auf die L-Antenne nicht zu, welche die gleichen Resultate ergibt.

Zusammenfassung. Es wird der bei normalem Erdfelde in einen hervorragenden Punkt der Erdoberfläche einströmende Vertikalstrom gemessen. Es wird gezeigt, daß dieser Strom in der Hauptsache durch radioaktiven Beschlag der Elektrode hervorgerufen wird, da

1) Wilson, Proc. Roy. Soc. A. **92**, 555, 1916.
2) Appleton, Watson, Watt und I. F. Herd, Proc. Roy. Soc. A. Vol. **111**, 615, 1926.

1) Dieckmann, Experimentelle Untersuchungen auf dem Grenzgebiet zwischen drahtloser Telegraphie und Luftelektrizität. Berlin 1922. S. 33.

1. die Bodenatmung eine ausschlaggebende Rolle spielt. Die Stromstärke wächst mit fallendem Luftdruck und mit steigenden Bodentemperaturen.

2. der Massenaustausch in den unteren Schichten von Einfluß ist, wie sich aus dem Vergleich mit Windgeschwindigkeit, Bewölkung und vertikalem Temperaturgefälle in den untersten Luftschichten ergibt. Sowohl die aperiodischen Änderungen wie der tägliche Gang des Kollektorstromes laufen wie zu erwarten, im allgemeinen mit dem des Potentialgefälles parallel. Das Morgenmaximum des Potentialgefälles im Sommer läßt sich durch den Gang des Kollektorstromes erklären: es wird durch das Einsetzen des Kollektorstromes eine Anreicherung positiver Träger in den unteren Luftschichten bewirkt.

Der tägliche Gang des Kollektorstroms läßt sich durch die tägliche Änderung des Austauschkoeffizienten unmittelbar über dem Boden erklären, durch den der Gehalt der Luft an radioaktiven Gasen geändert wird.

Die Messungen ergeben außerordentlich hohe Werte des Vertikalstroms.

Die Berechnung der Ergebnisse ist mit Unterstützung der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft geschehen, wofür ich an dieser Stelle nochmals meinen besten Dank sagen möchte.

(Eingegangen 14. Mai 1928.)

Bemerkung über den Wärmeübergang im Rohr.

Von L. Prandtl.

Die Frage nach den Wärmemengen, die bei der Strömung einer Flüssigkeit durch ein Rohr zwischen der Rohrwand und der Flüssigkeit ausgetauscht werden, wenn Rohr und Flüssigkeit verschiedene Temperatur haben, ist in letzter Zeit mehrfach behandelt worden, vgl. etwa die kürzlich in der Physik. Zeitschr. erschienene Arbeit von A. Sellerio[1]), sowie die Arbeit von ten Bosch in der Zeitschr. d. Vereins deutsch. Ing. 1926. In diesen Arbeiten wird u. a. eine Beziehung behandelt, die ich früher einmal angegeben habe[2]), und die inzwischen von G. I. Taylor[3]) noch einmal gefunden worden ist. Diese Beziehung behandelt das Zusammenwirken der nur durch Wärmeleitung beteiligten laminaren Schicht an der Rohrwand und der überwiegend durch Konvektion wirkenden inneren Flüssigkeitsmasse. Sie enthält noch zwei auf die turbulente Flüssigkeitsströmung im Rohr bezügliche Größen, von denen besonders die eine in meiner früheren Arbeit ganz unbestimmt bleiben mußte. In der Zwischenzeit sind auf diesem Gebiete erfreuliche Fortschritte gemacht worden, so daß es sich lohnt, die damaligen Rechnungen jetzt wieder aufzunehmen.

Da es für die Leser wohl so am bequemsten ist, übernehme ich hier die Bezeichnungen von Sellerio. Die in Rede stehende Beziehung ist von ihm in seiner Gleichung (IV) wiedergegeben. Diese lautet

$$h = \frac{\lambda \mu c_p u_m}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{c_p \eta}{\chi} - 1\right)} \qquad (1)$$

Darin ist h die „Wärmeübergangszahl", d. h. die sekundlich bei 1^0 Temperaturdifferenz zwischen Wand und Flüssigkeit durch die Flächeneinheit der Rohrwand tretende Wärmemenge. λ ist die Widerstandsziffer der Rohrströmung, definiert durch die Gleichung

$$-\frac{dp}{dx} = \lambda \frac{\mu}{2r} \frac{u_m^2}{2}, \qquad (2)$$

μ die Dichte, u_m die mittlere Geschwindigkeit, u_1 die Geschwindigkeit an der Grenze zwischen der laminaren Flüssigkeitsschicht an der Wand und der turbulenten Innenmasse; ferner ist r der Rohrradius, c_p die spezifische Wärme, η die Zähigkeit und χ die Wärmeleitung der Flüssigkeit. Durch die angedeuteten Fortschritte der Lehre von den turbulenten Strömungen können nicht nur für λ bessere Angaben als damals gemacht werden, sondern auch für u_1/u_m, das damals unbestimmt blieb, kann jetzt eine Formel angegeben werden, in der allerdings ein Zahlwert noch offen bleibt. H. Blasius[1]) hat die im Bereich von Reynoldsschen Zahlen $\Re = \frac{u_m r}{\nu}$ von 1 200 bis 50 000 sehr gut stimmende Formel angegeben:

$$\lambda = 0{,}3164 \sqrt[4]{\frac{\nu}{u_m d}},$$

die wir in $\lambda = 0{,}266 \sqrt[4]{\frac{\nu}{u_m r}} = 0{,}266\, \Re^{-1/4}$ (3) umschreiben können

$$\left(\nu = \frac{\eta}{\mu} = \text{kinematische Zähigkeit}\right).$$

1) Physik. Zeitschr. **29**, 55, 1928.

2) Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten, Physik. Zeitschr. **11**, 1072, 1910, vgl. dort Gl. (11) u. (12). Herr Sellerio hatte die Freundlichkeit, in Physik. Zeitschr. **29**, 398, 1928 schon auf die Übereinstimmung dieser Gleichungen mit seiner Formel (IV) hinzuweisen.

3) Technical Report of the Adv. Comm. for Aeronautics 1916/17, S. 423; vgl. auch den Stantonschen Artikel „Friction" in Glazebrooks Dictionary of applied Physics, Bd. I, S. 401 (London 1922).

1) Mitteilungen über Forschungsarbeiten herausgegeb. vom Ver. deutsch. Ing., Heft 131, 1913.

Über die Geschwindigkeitsverteilung konnte festgestellt werden, daß in dem turbulenten Gebiet der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit in der Wandnähe proportional der 7. Wurzel aus dem Wandabstand ist[1]). Mit geringem Fehler kann diese Beziehung bis zur Rohrmitte verwendet werden, so daß mit y = Wandabstand[2])

$$u = u_{\max} \cdot \left(\frac{y}{r}\right)^{1/7} \tag{4}$$

ist. An der Wand herrscht Laminarströmung mit einem Geschwindigkeitsanstieg $\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\eta}$, wo τ die Schubspannung in den wandnahen Teilen der Flüssigkeit ist, für die aus dem Blasiusschen Gesetz die Beziehung

$$\tau = 0{,}0225\,\mu u_{\max}^{7/4} \cdot \left(\frac{y}{r}\right)^{3/4}$$

$$= 0{,}0225\,\mu u_{\max}^{2} \left(\frac{y}{u_{\max} r}\right)^{1/4} \tag{5}$$

folgt[3]). $\frac{u_{\max} r}{\nu} = \mathfrak{R}_1$ ist dabei eine im Verhältnis $\frac{u_{\max}}{u_{\text{mittel}}}$ vergrößerte Reynoldssche Zahl (das Verhältnis ist etwa = 1,2). Es sei nun für die Rechnung angenommen, daß Laminargebiet und Turbulenzgebiet eine scharfe Grenze hätten, und daß die Grenze da liegt, wo $\frac{du}{dy}$ nach Gl. (4) $= \tau/\eta$ mit τ gemäß (5) ist, und daß im Laminargebiet die Geschwindigkeit linear, also mit konstantem $\frac{du}{dy}$ zu Null geht; es ergibt sich also

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{u_{\max}}{r} \cdot \left(\frac{r}{y}\right)^{6/7} = 0{,}0225\,\frac{\mu}{\eta} \cdot u_{\max}^{2} \cdot \mathfrak{R}_1^{-1/4};$$

links kann $\left(\frac{r}{y}\right)^{6/7}$ durch $\left(\frac{u_{\max}}{u}\right)^{6}$ ersetzt werden, rechts kann $\frac{\mu u_{\max}}{\eta} = \frac{u_{\max}}{\nu} = \frac{\mathfrak{R}_1}{r}$ gesetzt werden. Damit erhält man

$$\left(\frac{u_{\max}}{u}\right)^{6} = 0{,}1575\,\mathfrak{R}_1^{3/4}$$

oder

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1{,}363\,\mathfrak{R}_1^{-1/8}. \tag{6}$$

Das aus dieser Rechnung ermittelte u ist gerade das frühere u_1, so daß nun das gesuchte Verhältnis

$$\frac{u_1}{u_m} = \frac{u_{\max}}{u_m} \cdot 1{,}363\,\mathfrak{R}_1^{-1/8}$$

ist. Mit $\frac{u_{\max}}{u_m} = 1{,}2$ und Einführung von $\mathfrak{R}$ an Stelle von $\mathfrak{R}_1$ wird

$$\frac{u_1}{u_m} = 1{,}2^{7/8} \cdot 1{,}363\,\mathfrak{R}^{-1/8} = 1{,}60\,\mathfrak{R}^{-1/8}. \tag{7}$$

Damit sind die fraglichen Angaben gewonnen, und es wird also die Wärmeübergangszahl, mit $0{,}266/8 = 0{,}03325$ und $\mu u_m = \frac{\eta}{r}\mathfrak{R}$:

$$h = 0{,}03325\,\frac{c_p \eta}{r}\,\frac{\mathfrak{R}^{3/4}}{1 + 1{,}6\,\mathfrak{R}^{-1/8}\left(\frac{c_p \eta}{\chi} - 1\right)} \tag{8}$$

Es sei jedoch ausdrücklich erwähnt, daß der Zahlenfaktor 1,6 in Gl. (7) und (8) sehr unsicher ist. In Wirklichkeit ist keine scharfe Grenze des Laminargebiets und des Turbulenzgebiets zu erwarten, da die Wirbel sich bei Annäherung an die Wand ganz allmählich verlieren dürften. Das rein laminare Gebiet, das nur durch Wärmeleitung ohne Konvektion an dem Wärmeübergang beteiligt ist, wird hierdurch offenbar verkleinert, doch ist einstweilen Bestimmtes über den Einfluß auf unseren Zahlwert nicht zu sagen. Versuchszahlen, die bei Stanton (l. c.) angegeben sind, lassen einen Zahlwert 1,0 bis 1,1 an Stelle von 1,6 besser erscheinen. Die Entscheidung kann durch Wärmeübergangsversuche in Flüssigkeiten größerer Zähigkeit bei nicht zu kleinen Reynoldsschen Zahlen gewonnen werden[1]); es ist bemerkenswert, daß hier eine rein hydrodynamische Frage durch eine Wärmeübergangsbeobachtung geklärt werden kann.

Für die beiden Sonderfälle $\frac{c_p \eta}{\chi} = 1$ und $\frac{c_p \eta}{\chi} = \infty$ (das erste näherungsweise erfüllt bei Gasen das zweite bei sehr zähen Flüssigkeiten von geringeren Wärmeleitvermögen) ergibt die Formel (8) einfache Potenzgesetze; im ersteren Fall wird h proportional $\mathfrak{R}^{3/4}$, im zweiten proportional $\mathfrak{R}^{7/8}$; für Werte von $\frac{c_p \eta}{\chi}$ zwischen diesen Grenzen ergeben sich Werte von h, die zwischen diesen beiden Formeln liegen.

1) Vgl. etwa v. Kármán, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. **1**, 233, 1921; zwischen dieser Beziehung und der Blasiusschen Widerstandsformel existiert eine logische Verknüpfung, vgl. l. c., Abschn. 4.

2) Gemäß dem Nachstehenden ist y nicht genau der wirkliche Abstand von der Wand, sondern dieser Abstand verringert um $^6/_7$ der Dicke der laminaren Schicht (die allerdings häufig sehr klein ist).

3) v. Kármán, l. c., S. 241.

1) Dabei wäre zu beachten, daß der Versuchsstrecke eine Anlaufstrecke von wenigstens 50 Rohrdurchmessern vorgeschaltet ist, und daß der Druckabfall für die Wärmeübergangsströmung selbst gemessen wird. Die Temperaturunterschiede sollen klein gewählt werden, damit die Unterschiede in η und χ nicht zu groß werden.

Eine für die Anwendung wichtige Frage ist noch die: Welche Temperatur soll man für die Wärmeleitung und für die Zähigkeit in Formel (8) zugrunde legen, da doch beide Größen von der Temperatur stark abhängen. Ich stimme hierin mit Herrn ten Bosch[1]) überein, der vorschlägt, den Mittelwert zwischen der Wandtemperatur T_w und derjenigen an der Grenze der Laminarschicht gegen das Turbulenzgebiet (T_1) dafür zu wählen. Die Berechnung von T_1 kann so erfolgen, daß man die der Gl. (1) zugrunde liegende Beziehung

$$\frac{T_1 - T_w}{u_1 \eta} \cdot \chi = \frac{T_m - T_1}{u_m - u_1} \cdot c_p, \qquad (9)$$

die die Gleichheit der durch Leitung in der Laminarschicht übertragenen Wärmemenge mit der durch Konvektion im Turbulenzgebiet fortgeführten zum Ausdruck bringt, nach T_1 auflöst. Dies liefert

$$T_1 = T_w + (T_m - T_w) \frac{\frac{u_1}{u_m} \cdot \frac{c_p \eta}{\chi}}{1 + \frac{u_1}{u_m}\left(\frac{c_p \eta}{\chi} - 1\right)}, \qquad (10)$$

woraus die gesuchte Mitteltemperatur $\frac{T_w + T_1}{2}$ unter Einführung vorläufiger Werte von η und χ berechnet werden kann. Gegebenenfalls ist die Rechnung mit den verbesserten Werten zu wiederholen.

Zusammenfassung. Eine frühere Formel für den Wärmeübergang im Rohr wird durch neuere Angaben über Eigenschaften der turbulenten Flüssigkeitsströmung ergänzt und eine Vorschrift für die bei der Ermittlung der Konstanten der Flüssigkeit zugrunde zu legende Mitteltemperatur angegeben.

Nachtrag bei der Korrektur.

In der Zwischenzeit ist über den Wärmeübergang strömender Flüssigkeiten eine Arbeit von L. Schiller und Th. Burbach[2]) erschienen, in der u. a. eine neue sehr einfache Formel, dort als Gl. (2) bezeichnet, vorgeschlagen wird. Für die Analyse der Forschungsergebnisse möchte ich aber meiner Formel doch den Vorzug geben, und die obigen Darlegungen lassen mich erwarten, daß der Exponent der Potenzformel abhängig von $\sigma = \frac{\chi}{\eta c_p}$ zwischen $^3/_4$ und $^7/_8$ variieren wird. Immerhin ist es bemerkenswert, daß die Schillersche Formel die Wärmeübergangsversuche für Luft und für Wasser gleich befriedigend darzustellen vermag.

1) Z. V. D. I. S. 912, 1926.
2) Physik. Zeitschr. **29**, 340, 1928.

(Eingegangen 25. Mai 1928.)

Bemerkung zur Theorie der Stromleitung in festen Isolatoren.

Von R. Seeliger.

Wie Pool, Schiller, Sinjelnikoff und Walther u. a. gefunden haben, hängt der Widerstand fester Isolierstoffe nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der am Isolator liegenden Potentialdifferenz ab; er nimmt ab, wenn diese beiden Größen zunehmen, eine Eigenschaft die bekanntlich für die Theorie der elektrischen Festigkeit der Isolatoren von grundsätzlicher Bedeutung ist, solange man sich im Gebiet des sog. Wärmedurchschlags und des wärme-elektrischen Durchschlags befindet. Von Interesse für die Kenntnis des Mechanismus der Stromleitung ist nun insbesondere die Abhängigkeit des Widerstandes von der Potentialdifferenz und es sind deshalb auch bereits eine Reihe von Hypothesen vorgeschlagen worden, um diese Abhängigkeit zu erklären. Die russischen Physiker, die sich in den letzten Jahren so erfolgreich mit den physikalischen Grundlagen des elektrischen Durchbruchs durch feste Isolatoren beschäftigt haben, bevorzugen hierbei die Annahme, daß auch bei hohen Feldstärken unverändert das Ohmsche Gesetz gilt und daß die Abnahme des Widerstandes mit zunehmender Feldstärke eine nur „scheinbare" ist, vorgetäuscht durch die Ausbildung elektromotorischer Polarisationskräfte im Inneren des Isolators. Sie konnten diese Annahme durch sehr eingehende direkte Messungen der in Betracht kommenden Größen stützen; Joffe hat sich kürzlich[1]) in einer zusammenfassenden Darstellung der bisher erhaltenen Ergebnisse von neuem ganz auf den Boden dieser Annahme gestellt und sich gegen eine Kritik von Schiller gewendet.

Ich glaube nun aber, daß die Einführung der genannten Polarisationsspannungen und der damit zusammenhängenden Begriffe der „wahren Leitfähigkeit" und der „Polarisationskapazität" zwar bei der Beschreibung der Eigenschaften eines Isolators manche Vorteile bieten kann, daß sie aber letzten Endes von der eigentlichen Fragestellung abführt und zur theoretischen Klärung des Mechanismus der Stromleitung in starken Feldern nichts Neues beiträgt. Zur Unterstützung dieser skeptischen Auffassung möchte ich im folgenden auf den tatsächlichen Sachverhalt etwas genauer eingehen.

Der Grundgedanke der Theorie der Polarisationskräfte ist am besten ersichtlich für den fiktiven (z. B. in Isolatoren vom Kalkspattypus sehr weitgehend realisierten) Fall, daß die Potentialverteilung im Inneren des Isolators linear ist

1) Zeitschr. f. Phys. **48**, 288, 1928.

und daß nur dicht an einer oder an beiden der Elektroden ein Potentialsprung liegt. Man mißt unmittelbar die Potentialdifferenz V zwischen den Elektroden und den übergehenden Strom J und berechnet daraus bei einem Elektrodenabstand d den „scheinbaren" spez. Widerstand R des Isolatormaterials zu

$$R \cdot d = \frac{V}{J}. \tag{1}$$

Auf diesem Weg hat man nun gefunden, daß R mit zunehmendem V abnimmt. Wenn jedoch an den Elektroden Potentialsprünge von dem Gesamtbetrag P liegen, ist R nicht der „wahre" spez. Widerstand, sondern es ist dieser zu berechnen aus

$$R' \cdot d = \frac{V - P}{J}. \tag{2}$$

Die Elimination von J aus (1) und (2) gibt

$$R = R' \cdot \frac{V}{V - P}. \tag{3}$$

Nur wenn P proportional mit V zunimmt, ist R ebenfalls eine Materialkonstante, während im allgemeinen, d. h. für $P = P(V)$, R von V abhängen wird; wenn insbesondere P mit V stärker als proportional zunimmt, erhält man eine Abnahme des scheinbaren Widerstandes R mit zunehmender Spannung V.

Wenn man diese Überlegungen auf den allgemeinen Fall übertragen will, daß die Potentialverteilung im ganzen Isolatorinneren irgendwie abweicht von der linearen Verteilung, wird man offenbar folgendermaßen vorgehen müssen. Zwischen den Elektroden vom Abstand d liege die Potentialdifferenz V_0; diese und der Strom J werde gemessen. Die tatsächliche Potentialverteilung sei $V' = V'(x)$. Dann ist wieder für den „scheinbaren" spez. Widerstand

$$R = \frac{1}{d} \frac{V_0}{J}, \tag{4}$$

während für den „wahren" in einer Schicht dx anzusetzen ist

$$R' \, dx = \frac{dV'}{J}. \tag{5}$$

Eliminiert man aus (4) und (5) den Strom J, so erhält man

$$R = R' \cdot \frac{V_0}{d} \frac{1}{(dV'/dx)} \tag{6}$$

und durch Integration über die Dicke d des Isolators hieraus auch den „scheinbaren" (W) und den „wahren" (W') Gesamtwiderstand des Isolators. Wenn man noch $dP = dV - dV'$ für die in der Schicht dx liegende Polarisationsspannung einführt, kann man die Endformeln in folgender Gestalt schreiben

$$R = R' \left(1 + \frac{dP}{dV'}\right) = R' \frac{dV}{dV - dP}$$

$$W = W' + R' \int_0^d \frac{dP}{dV'} dx \tag{7}$$

$$= W' + R' \int_0^d \frac{dP}{dV - dP} dx$$

als die sinngemäße Verallgemeinerung der Formel (3).

R' ist definitionsgemäß auch hier eine Materialkonstante, R hingegen ist nun örtlich variabel und hängt von der Potentialverteilung ab. Da negative Feldstärken (wie sie in manchen Gasentladungen festgestellt worden sind) hier nicht auftreten werden, ist dV' stets positiv und es ist also $R \leqq R'$ wenn $dP \leqq 0$ ist. Realere Bedeutung haben W und W'. Wie man leicht zeigen kann, ist aber stets $W > W'$, außer im trivialen Fall, wo dP überall gleich null und $W = W'$ ist. Denn wie man durch eine Unterteilung des ganzen Integrationsbereiches 0 bis d in die Abschnitte, in denen dP positiv bzw. negativ ist, sofort einsehen kann, ist stets

$$\int_0^d \frac{dP}{dV'} dx > 0,$$

weil

$$\int_0^d dP = 0 \quad \text{d. h.} \quad \int_0^d dV = \int_0^d dV'$$

sein muß.

Endlich läßt sich natürlich auch die Dichte ϱ der in der Schicht x, $x + dx$ sitzenden Raumladung mit den Polarisationsspannungen in Verbindung bringen. Es ist ϱ proportional mit $\frac{d}{dx}\left(\frac{dP}{dx}\right)$; dies ist physikalisch klar, da dP/dx die in dieser Schicht sitzende Polarisationskraft ist und die Raumladungen die Quellenstellen dieser fiktiven elektrischen Kraft sind.

Die in dem einfachen zuerst angegebenen Beispiel scheinbar sich zeigende Anschaulichkeit verschwindet im allgemeinen Fall also fast vollständig. Was übrig bleibt, ist eigentlich eine Trivialität, nämlich der Ersatz einer nichtlinearen Potentialverteilung durch eine geeignete kontinuierliche Verteilung von fiktiven inneren elektromotorischen Kräften; es ist natürlich notwendig, diese einzuführen, wenn man im allgemeinen Fall das Ohmsche Gesetz beibehalten will, ohne für die stationäre Strömung die

Quellenfreiheit des Stromes aufzugeben. Daß man damit jedoch über einen rein formalen Ansatz nicht hinausgeht und über den eigentlichen Mechanismus des im Isolator fließenden Trägerstromes keinerlei neuen Aufschluß, hinausgehend über die Aussagen aus der Potentialverteilung $V'(x)$, bzw. der Verteilung der Raumladungen, gewinnt, geht aus den obigen Ausführungen bereits hervor. Man kann z. B. auch keine Folgerung dahingehend ziehen, ob der scheinbare Widerstand R bzw. W mit zunehmender Potentialdifferenz V_0 zu oder abnimmt, wenn man wiederum nicht die Änderung der Verteilung $V'(x)$ d. h. die Verteilung der Raumladungen mit V_0 bereits kennt.

Die Analogie mit der Sachlage bei Gasentladungen wird dies vielleicht noch deutlicher hervortreten lassen. In jeder Gasentladung, in der die Potentialverteilung nicht linear ist, kann man natürlich ganz ebenso wie oben die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes postulieren und dann geeignete innere elektromotorische Polarisationskräfte annehmen. Man wird aber daraus wohl kaum eine Aufklärung über den Mechanismus der Entladung, d. h. irgendwelche Aufschlüsse über die Kinetik der Ladungsträger zu finden erwarten. Die bekannte Sachlage in einem fremdionisierten dichten Gas eignet sich im Gebiet des Sättigungsstromes gut als Demonstrationsbeispiel für den eingangs besprochenen einfachsten Fall, da man es dabei ebenfalls mit einer im Inneren des Gases konstanten Feldstärke d. h. linearem Potentialgefälle und einer steilen sprungartigen Potentialänderung dicht an jeder der Elektroden zu tun hat. Man hat dann $J = \text{Const} = \text{Sättigungsstrom } J_s$ zu setzen und würde also für den scheinbaren spez. Widerstand finden $R \cdot d = V/J_s$ d. h. eine Proportionalität mit der Feldstärke. Andererseits könnte man einen wahren spez. Widerstand $R' \cdot d = (V - P)/J_s$ und Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes ansetzen, wenn man Polarisationsspannungen an den Elektroden annimmt, die linear mit der angelegten Spannung ansteigen. Ein einfachstes Beispiel zur Analogie mit dem allgemeinen oben durchgerechneten Fall bietet etwa die raumladungsbegrenzte Langmuir-Schottkysche Elektronenströmung im Vakuum. Hier muß man eine kontinuierliche Verteilung von elektromotorischen Kräften im ganzen Raum zwischen den Elektroden annehmen und würde folgendes erhalten. Es ist bekanntlich

$$J \sim V_0^{3/2}; \quad V' \sim V_0 \cdot x^{1/3}.$$

Der scheinbare Widerstand W ist also hier proportional mit $1/\sqrt{V_0}$, er nimmt mit zunehmendem V_0 ab. Der scheinbare spez. Widerstand R ändert sich wie $\text{const} \cdot x^{-1/3}$ mit x und die Polarisationsspannung in der Schicht x, $x + dx$ läßt sich darstellen in der Form $dP = (a - b \cdot x^{1/3})\,dx$. Ich sehe keinen Unterschied zwischen diesen Beispielen und den Verhältnissen in einem festen Isolator und kann jedenfalls nicht finden, daß die Einführung des wahren spez. Widerstandes und der Polarisationsspannungen für die physikalische Einsicht in den Mechanismus der Stromleitung hier irgendeinen Vorteil bringt.

Sinjelnikoff und Walther haben in einer schönen experimentellen Untersuchung[1]) nun aber gezeigt, daß vor Ausbildung der Raumladungen im Isolator tatsächlich das Ohmsche Gesetz bei hohen Feldstärken ebenso gilt wie in schwachen Feldern und diese wichtige Feststellung behält natürlich ihren vollen Wert. Nach Ausbildung der Raumladungen gilt das Ohmsche Gesetz für den scheinbaren Widerstand nicht mehr und wenn in jener Arbeit seine Gültigkeit für den wahren Widerstand gezeigt wird, so ist dies nach den obigen Ausführungen ein Zirkelschluß oder besser gesagt eine reine Formalität. Auch hier kann die Analogie mit Gasentladungen vielleicht die Sachlage noch etwas anschaulicher machen. Der Unterschied zwischen den Vorgängen in einem Isolator und in einer Gasentladung ist nämlich hinsichtlich der hier interessierenden Dinge nur der, daß sich in einem Gas die definitive Raumladungs- und Potentialverteilung sehr viel schneller einstellt und deshalb sich alle bisherigen Untersuchungen auf den Endzustand (Reststrom) beziehen. Die eine der von Sinjelnikoff und Walther angegebenen Methoden zur Ermittelung des wahren spez. Widerstandes würde man unmittelbar übertragen, die andere mit dem neuen Hilfsmittel des Kathodenstrahloszillographen vermutlich ebenfalls anwenden können (und hat damit z. B. beim Studium der Entwicklung eines Funkenüberschlages eigentlich bereits begonnen). Man wird aber wohl sicher nicht aus der Umrechnung des gewohnten ionentheoretischen Bildes auf räumlich verteilte innere elektromotorische Kräfte und Ohmsche Stromelemente eine grundsätzliche weitere Klärung des Entladungsmechanismus erwarten. Natürlich „sind die Gegenspannung, deren Größe und räumliche Verteilung, die Polarisationskapazität keine Hypothesen" in dem Sinn, daß sie nicht auch wirklich zu messen bzw. aus entsprechenden Messungen zu errechnen wären. Damit kommt man aber wie ich glaube keinen Schritt weiter in der Einsicht in den Mechanismus der sich tatsächlich abspielenden Vorgänge. Eine Ohmsche Strömung ist eine nicht nur stationär mögliche, sondern auch eine stabile Strömung und wenn sie scheinbar wie in festen Isolatoren und Gasen von selbst in eine andere komplizierte übergeht — in welchen Zeiten diese Ent-

1) Zeitschr. f. Phys. **40**, 786, 1927.

wicklung vor sich geht, ist ganz nebensächlich — so halte ich es nicht für richtig zu schließen: Das Ohmsche Gesetz gilt und gilt auch weiterhin, die Abweichungen sind nur scheinbar und sind durch die Ausbildung von Gegenspannungen zu erklären. Worauf es ankommt, erfaßt man vielmehr, wenn man schließt: Das Ohmsche Gesetz gilt nicht, es gilt schon von Anfang an nicht, die Abweichungen sind nicht nur scheinbar, sondern die Vorgänge in der Strömung sind eben ganz andere wie in einer Ohmschen Strömung.

(Eingegangen 30. Mai 1928.)

Über die Hypothese, daß die höchsten Atmosphärenschichten durch β-Strahlen erwärmt werden.

Von Helge Petersen.

In dieser Zeitschrift (**29**, 232, 1928) hat Wilhelm Anderson einige Einwendungen vorgebracht gegen die von mir (d. Z. **28**, 510, 1927) erörterte Möglichkeit einer Erwärmung der höchsten Atmosphärenschichten durch β-Strahlen von der Sonne. Hierdurch veranlaßt möchte ich um Platz für folgende Bemerkungen ersuchen.

Der Aufsatz W. A.s zerfällt in zwei Teile: 1. Über die Möglichkeit der Existenz einer elektrisch geladenen Korpuskularstrahlung, ausgehend von der Sonne, und 2. Über die Möglichkeit einer mehr oder weniger vollständigen Absorption in der Atmosphäre einer β-Strahlung gewisser Intensität.

1. Daß es gewisse Schwierigkeiten gibt, sich eine mit Rücksicht auf das Vorzeichen der elektrischen Ladung einheitliche Strahlung von der Sonne vorzustellen, ist ja allgemein erkannt; eine noch größere Schwierigkeit als diejenige von W. A. erwähnte, sehe ich übrigens im Umstande, daß ein solches Strahlenbündel, wegen der gegenseitigen Abstoßung der Korpuskeln, nicht als solches die Erde erreichen zu können scheint. Demgegenüber steht aber die Tatsache, daß die Birkeland-Störmersche Nordlichttheorie sehr viele der beobachteten Eigentümlichkeiten des Nordlichts und dessen Verbindung mit den erdmagnetischen Verhältnissen im wesentlichen zu erklären vermag, so viele, daß man wohl kaum bezweifeln darf, hier auf dem richtigen Wege zu sein, selbst wenn zugegeben wird, daß wir noch keine erschöpfende Erklärung besitzen. Die Wahrscheinlichkeit, die wir dadurch für die Existenz einer Korpuskularstrahlung gewinnen, die von der Sonne bis zur Erde reicht, scheint mir von viel größerer Bedeutung zu sein, als die negativen Einwendungen mehr allgemeiner Natur, die gegen die Existenz derselben erhoben werden können. Wie W. A. selbst anführt, läßt sich z. B. die von ihm erwähnte Einwendung recht leicht beseitigen (siehe auch S. Chapman, Ionisation in the upper atmosphere. Quarterly Journal 1926, Nr. 219). Daß man dabei genötigt wird, auch eine positiv geladene Strahlung als Quelle einer eventuellen Erwärmung anzunehmen, gebe ich gern zu; das Auftreten beider Gattungen von Strahlen im Nordlichtprozeß ist ja mehrfach angenommen worden. Die Berechnung der Energie auf der Grundlage der Annahme einer β-Strahlung scheint mir dennoch naheliegend, weil diese Annahme die Grundlage der Berechnung Birkelands war. (Ich möchte hier einfügen, daß es mich wundert zu lesen (l. c. S. 232), daß ich den Elektronenstrom auf 10^6 schätze. Birkeland hat diese ungefähre Stromstärke aus seinen Messungen unter gewissen speziellen Annahmen gefunden, wie auch von mir angeführt, und ich habe nur sein Resultat benutzt.) Zieht man, statt mit Birkeland eine β-Strahlung anzunehmen, die Annahme einer α-Strahlung, oder vielleicht Strahlungen beider Gattungen vor, wird ja dadurch nur die zu erwartende Erwärmung viel größer werden.

Damit meine ich aber — im Gegensatz zu W. A. —, daß „alle Schwierigkeiten gehoben sind". Denn, wenn wir Strahlungen beider Vorzeichen annehmen, ist ja zugleich die Möglichkeit gegeben zu verstehen, warum die Aufladung der Erde während der Bestrahlung nicht so groß wird, daß sie eine weitere Bestrahlung verhindert — ganz abgesehen von der Möglichkeit anderer Erklärungsweisen.

Zu den letzten Bemerkungen W. A.s möchte ich noch sagen, daß ich gar nicht den Wunsch habe, eine Hypothese aufrechtzuerhalten. Ich meine — und meinte auch dies geschrieben zu haben —, daß wenn wir eine Korpuskularstrahlung annehmen und dieser Strahlung eine Intensität der erwähnten Größenordnung beimessen, dann ist eine Erwärmung der obersten Atmosphärenschichten, wie entwickelt, zu erwarten; und es scheint mir, daß W. A. überhaupt keine Einwendung gegen diese Hypothese gemacht hat.

Kopenhagen, Dän. Met. Inst., Mai 1928.

(Eingegangen 8. Mai 1928.)

Erwiderung auf den letzten Artikel von Herrn H. Petersen.

Von Wilhelm Anderson.

Was die 10^6 Amp. anbetrifft, so habe ich gegen einen solchen Strom nichts einzuwenden. Es ist auch vielleicht möglich, daß dabei die Ge-

schwindigkeit der β-Strahlen $2{,}59 \cdot 10^{10}$ cm $\cdot$ sec^{-1} beträgt: mit einer solchen Zahl hat nämlich H. Petersen in seinem vorigen Artikel gerechnet[1]). Ebenfalls gebe ich die Möglichkeit zu, daß diese β-Strahlung bei der Erwärmung der höchsten Atmosphärenschichten die Hauptrolle spielt. Dies alles gebe ich aber nur unter der Bedingung zu, daß wir es mit einem reinen Elektronenstrom zu tun haben, ohne merkliche Beimischung positiver Atomionen.

Sollte dagegen der Elektronenstrom von einem gleich intensiven und gleich schnellen Strome positiver Atomionen begleitet sein, so liegen die Verhältnisse ganz anders. Vor allem scheint mir dann die oben erwähnte Geschwindigkeit unzulässig groß zu sein. Die schnellsten bis jetzt bekannten positiven Ionen sind die α-Strahlen der radioaktiven Stoffe; die Geschwindigkeit dieser Strahlen beträgt aber höchstens etwa $2 \cdot 10^9$ cm $\cdot$ sec^{-1}. Die Entstehung einer Geschwindigkeit von $2{,}59 \cdot 10^{10}$ cm $\cdot$ sec^{-1} wäre bei positiven Ionen wohl kaum zu erklären. Ich glaube daher, daß man mit etwa 150mal kleineren Geschwindigkeiten rechnen müßte, so wie es z. B. die Theorie von E. A. Milne verlangt. Milne hat nämlich gezeigt, daß unter gewissen Umständen ionisiertes Calcium durch selektiven Strahlungsdruck von der Sonne weg in den Weltenraum getrieben werden kann. Die maximale Geschwindigkeit, welche das ionisierte Calcium dabei erlangen kann, ist etwa 1600 km $\cdot$ sec^{-1}; dadurch erklärt Milne die Entstehung der Protuberanzen[1]). Wenn solche Protuberanzenmassen in die irdische Atmosphäre eindringen, so werden sie keine elektrische Aufladung hervorrufen, da die positiven Calciumionen von einer entsprechenden Anzahl gleich schneller Elektronen begleitet werden. Diese Protuberanzenmassen können auch die Erwärmung der höchsten Schichten der irdischen Atmosphäre verursachen, aber die Hauptrolle dabei werden die positiven Calciumionen spielen, da ihre Masse und also auch ihre kinetische Energie viele tausendmal größer ist als diejenige der Elektronen. Den letzteren wird bei der Erwärmung der höchsten Atmosphärenschichten eine nur ganz unmerkliche Rolle zufallen.

1) Freilich halte ich es für ausgeschlossen, daß diese β-Strahlung durch radioaktive Prozesse im Sonnenkörper hervorgerufen wird. Ich kann aber auf diese Frage hier nicht näher eingehen.

1) The Observatory **49**, 183, 1926.

Dorpat (Estland), 13. Mai 1928.

(Eingegangen 22. Mai 1928.)

BESPRECHUNGEN.

F. Weigert, Optische Methoden der Chemie. 8°. XVI u. 632 S. Mit 341 Abb. u. 16 Tafeln. Leipzig, Akad. Verlagsges. m. b. H. 1927. Geh. M. 36.—, geb. 38.—.

Da in auffälliger Weise bei Experimentaluntersuchungen sowie auch im Unterricht der Doktoranden immer weniger Wert gelegt wird auf rein experimentelle Fragen, so ist das Buch von Weigert besonders zu begrüßen. Er hat in der Wahl der behandelten Fragen wie in der Art der Darstellung eine besonders glückliche Hand gehabt; das Buch ist so recht als ein Lehrbuch für den älteren Studenten der Chemie, der Physik und physikalischen Chemie zu bezeichnen. Mit der so oft betonten „starken Durchdringung der Chemie mit physikalischen Ideen" sollte eine stärkere Betonung methodisch-physikalischen Könnens des Chemikers Hand in Hand gehen. Man darf nicht sagen, daß ein Einblick in die Zeitschriftenliteratur solches schon weitgehend zeigt; es handelt sich nicht nur darum, daß der forschende Chemiker und Physikochemiker die Methoden kennt, sondern ab ovo beherrscht; mehr aber noch ist es wichtig, daß das große Heer der in die Industrie gehenden Chemiker das physikalische Rüstzeug besitzt, um physikalische Methoden anzuwenden und einzuführen. Gerade dieses können Bücher dieser Art leisten, wenn sie genügende Verbreitung finden.

Um einen Überblick über das Gebotene zu geben sei der Inhalt angegeben: 1. Optische Instrumente und ihre Verwendung, 2. Lichtquellen, 3. Strahlenfilter, 4. Photographische Operationen, 5. Spektroskopie, 6. Photometrie, 7. Spektralphotometrie, 8. Kolorimetrie und Nephelometrie, 9. Farbenmessungen, 10. Energiemessungen, 11. Photochemische Messungen, 12. Mikroskopie und Ultramikroskopie, 13. Lichtbrechung, -bestimmung, 14. Analyse von polarisiertem Licht, 15. Luminiszenz, Untersuchung schwacher Lichterscheinungen.

Referent hat das Buch ziemlich genau gelesen und ist für viele Hinweise, die er da gefunden hat, dankbar. Zahlreiche Fragen kann Weigert nach eigenen Untersuchungen darstellen, er gibt viel von seinen Erfahrungen bekannt — und man weiß ja aus den zahlreichen chemisch-optischen Untersuchungen des Verfassers, wie gut er auch schwierige experimentelle Dinge beherrscht. Manche kleine Unklarheiten sind aufgefallen, von denen einige hier angeführt sein sollen, da Weigert im Vorwort direkt darum bittet, aber auch um den Benützer des Werkes die Möglichkeit zu geben, sie zu verbessern. S. 18: die Zerstäubung erfolgt besser in Edelgasen; noch besser ist Verdampfung im Vakuum. S. 34: es ist vorteilhaft für gleichmäßiges Brennen der *Hg*-Lampe, große Selbstinduktion in die Zuleitungen zu legen. S. 41: die Angaben über die Struktur von *Hg* 2537 sind veraltet. S. 42: erste Zeile muß wohl Auerbrenner statt

Quarzbrenner heißen. S. 43, 10. Zeile von unten: Methode geht nur bei Gleichstrom oder völlig synchronem Lauf der Spektralröhren. Andere kontinuierliche Spektren im UV liefern Jod und H_2. S. 53: Ultrarot undurchlässige Filter gibt es fast nicht (vgl. § 52, S. 64); man muß vor der Methode der thermoelektrischen Energiemessung im Sichtbaren warnen, wenn das Rot nur durch Filter fortgebracht ist. S. 54: dünne Spiegelglasplatten ($^1/_{20}$ mm) lassen bei λ 280 $\mu\mu$ noch etwa 30 Proz. durch! S. 64: Rotfilter: Molybdänglanz, Biotitglimmer und ähnliches nicht vergessen! S. 86, § 69: Unterschied zwischen Banden-, kontinuierlichem Spektrum und Spektrallinien bei Apparaten verschiedener Dispersion, Bedeutung der Spaltbreite bei dem Suchen nach Absorptionslinien — dies sollte der Text ausführlicher enthalten. S. 93: Monochromator zuerst von Lehmann beschrieben. S. 112, 3. Zeile von unten: Quarzplättchen (statt Glasblättchen). S. 153 ff.: hier sollte das thermoelektrische Photometer von Ives behandelt sein, das wohl sehr anwendungsfähig sein dürfte. S. 203, 2. Zeile: Photozelle (statt Entladungsröhre). S. 231, Fig. 213 ohne nähere Ausführung über die Bedeutung der Buchstaben unverständlich. Im Kap. 7 (das im ganzen übrigens zu den besten des Buches gehört) sollte auch ein Hinweis darauf stehen, daß unter Umständen geringste Verunreinigung ganz falsche Ergebnisse herbeiführen kann; z. B.: die Pohlsche Untersuchung des Cholesterins! Im Kap. 8 bei der Nephelometrie vermisse ich einen Hinweis darauf, daß es bei Trübungsmessung besonders auf exakt definierten Strahlengang ankommt, daß man z. B. die Trübung einer langen und kurzen Flüssigkeitsschicht nicht unmittelbar miteinander vergleichen darf. S. 274 ff.: hier sollte einiges über die kritischen Arbeiten über die Ostwaldsche Farbenmessung gesagt werden. S. 353: die *HCl*-Reaktion verläuft doch jedenfalls anders. S. 506: die Tabelle für die Wellenlänge der *Na*-Linie ist nicht verständlich. S. 377 dürfte viel ausführlicher sein, dagegen S. 379 ruhig fehlen: diese Erscheinungen sind wesentlich komplizierter als hier dargestellt.

Zum Schluß soll nochmals betont werden, daß „die Optischen Methoden der Chemie" eine Neuerscheinung von grundlegender Bedeutung darstellen. Sie bilden keine Konkurrenz zu Kohlrausch, nicht zu Ostwald-Luther, sie stellen ein Novum in der Literatur der Experimentalwissenschaft dar. Aber sie sind nicht nur ein Lehrbuch: ein umfassendes Inhaltsverzeichnis: 30 Seiten Autorenregister mit Angaben des Inhalts ihrer zitierten Arbeiten, 30 Seiten Sachregister machen sie zu einem nützlichen Nachschlagewerk. — Die Verlagsbuchhandlung hat für eine sehr gute Ausstattung gesorgt, ausgezeichnet sind die 16 Seiten (größtenteils photographische) Abbildungen mit ausführlichen Erläuterungen. Walther Gerlach.

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Herausgegeben von Th. v. Kármán. Heft 4. Gr. 8°. 48 S. Mit 46 Abb. Berlin, Julius Springer. 1925. M. 5.10.

Aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen erscheinen seit einiger Zeit, herausgegeben von seinem Direktor v. Kármán, in schöner Ausstattung die dort ausgeführten theoretischen und experimentellen Arbeiten in Heftform mit etwa 3 Bogen Umfang. Diese Erscheinungsform ist insofern zu begrüßen, als man auf diese Weise die Möglichkeit erhält, ohne allzu große Kosten sich solche Arbeiten zu erwerben, die sonst je nach dem mehr theoretischen, technischen oder experimentellen Charakter in recht vielartigen Zeitschriften zerstreut sind.

Das vorliegende Heft 4 enthält zunächst eine theoretische Arbeit von B. Eck: „Strömungserscheinungen in Ventilen", in der gezeigt wird, daß unter gewissen Vernachlässigungen (zweidimensional, ohne Reibung, freier Strahl nach Verlassen des Ventils) sich diese Strömungen nach den Methoden der exakten Hydrodynamik behandeln lassen. Auch werden Vergleiche mit Versuchen von Schrenk angestellt. Es folgt eine „Gastheoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl" von Th. v. Kármán, die den Lesern dieser Zeitschrift von dem Referenten bereits in einem zusammenfassenden Bericht über das Turbulenzproblem mitgeteilt wurde (Physikal. Zeitschr. **26**, 571, 1925). Als dritte Arbeit schließt sich an: „Über die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz", der Vortrag v. Kármáns auf der Delfter Tagung für angewandte Mechanik, in dem Kármán neben zahlreichen anderen interessanten Betrachtungen den Gedankengang einer statistischen Berechnung des turbulenten Bewegungszustandes und des turbulenten Strömungswiderstandes darlegt, ein Gedankengang, der vielleicht einmal zur Lösung dieser Seite des Turbulenzproblems führen wird. Beschlossen wird das Heft durch eine Arbeit von B. Eck und E. Kayser: „Über einige Anwendungen nomographischer Methoden in der Thermodynamik", in der ein Druck-, Volumen-, Temperaturdiagramm und eines zur Ermittlung der Arbeit für 1 kg Gas bei polytroper Zustandsänderung mitgeteilt wird. Der Inhalt des Heftes beweist neben der Güte auch die Vielseitigkeit der Aachener Arbeiten.

L. Schiller.

E. Marcus, Die Zeit- und Raumlehre Kants in Anwendung auf Mathematik und Naturwissenschaft. 8°. 238 S. München, E. Reinhardt. M. 6.—.

Der im Kreise der Freunde Kantischer Philosophie bekannte Verf. will eine geschlossene und entschieden neue Begründung der Lehre Kants geben, indem er zeigt, wie sie angewandt werden muß. Indessen darf der Naturwissenschaftler nicht hoffen, in dieser Abhandlung etwa einen, seinem fachwissenschaftlichen Ausgangspunkt angemessenen Weg zu einem erleichterten Verständnis der Kantschen Raum-Zeitphilosophie zu finden. Kants Lehre wird stellenweise mit einer so verworrenen Dialektik vorgetragen (obgleich der Verf. selbst ausführlich gegen diese „aus Irrungen der Reflexion entsprungene Scheinlogik" zu Felde zieht), daß es z. B. leicht möglich wäre, mit methodisch gleichwertigen Gedankengängen zu beweisen, daß es nur Kurven geben kann, die überall eine bestimmte Tangentenrichtung haben. Es ist infolge Raummangels ganz unmöglich, auf alle Einzelheiten einzugehen. Es seien nur einige Sätze der Äthertheorie angeführt, die sich wesensbestimmend durch das ganze Buch hindurchziehen: „die Raumvorstellung tritt gleichzeitig mit der Empfindung auf, aber nicht durch sie, oder durch ihre Verlegung nach außen, sondern dadurch, daß wir die Empfindung nicht z. B. in unsrer Netzhaut wahrnehmen, sondern außerhalb dieser Organe ... Dies wird bewirkt durch die vom ätherischen Zentralorgan über die Leibesgrenze hinausgehende Undulation des organisierten Äthers beim Zu enstoß mit

dem transorganischen Äther ... Diese Theorie erklärt auch, daß wir das optische Gebilde im Spiegel hinter der Spiegelfläche wahrnehmen: die organischen Wellen gehen durch den Spiegel hindurch und müßten hinter denselben mit einer hinreichend empfindlichen photographischen Platte experimentell nachweisbar sein" (!!) — Vielleicht kann man auf geisteswissenschaftlichem Gebiet mit solchen Methoden etwas Sinnhaftes zum Ausdruck bringen, vom Gebiet der exakten Wissenschaften aus jedoch stellen sich derartige Betrachtungsweisen als schöne Dichtungen dar, die man wissenschaftlich ablehnen wird. Es ist zu bedauern, daß verschiedene wertvolle Einzelheiten des Buches, wozu auch die bisher noch unveröffentlichte, historisch interessante Kantsche Ätherttheorie gehört, hinter solch unzugänglichem Gestrüpp verborgen liegen.

R. Döpel.

F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.

1. Teil, für den Druck bearbeitet und herausgegeben von R. Courant und O. Neugebauer. (Bd. 24 der Sammlung: Grundlehren der math. Wissenschaften.) Gr. 8°. XIII u. 385 S. Mit 48 Fig. Berlin, Julius Springer. 1926. M. 21.—; geb. M. 22.50.

2. Teil: Die Grundbegriffe der Invariantentheorie u. ihr Eindringen in die mathematische Physik. Für den Druck bearbeitet von R. Courant und St. Cohn-Vossen. (Bd. 25 der Sammlung: Grundlehren der math. Wissenschaften.) Gr. 8°. X und 208 S. Mit 7 Fig. Berlin, Julius Springer. 1927. M. 12.—; geb. M. 13.50.

Die angezeigten Vorlesungen sind, obwohl leider Fragment geblieben und trotz mancher Unausgeglichenheiten, eine in ihrer Art wohl einzigartige Erscheinung. Sind doch diese Überblicke über die Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen das Werk eines Mannes, der selber in seiner Wissenschaft ein Erschauer großer Zusammenhänge war und der über die Kunst lebendigster Darstellung in seltenem Maße verfügte. Und wird doch gerade der Zeitraum und seine Vorgeschichte behandelt, in den Kleins Wirksamkeit fiel. Die Physik findet ausgiebige Berücksichtigung, wie das bei Klein wohl selbstverständlich ist. So wird im 1. Bande auf Gauß' physikalische Arbeiten (Gauß und Weber, Erdmagnetismus usw.) eingegangen. Ferner finden sich Erörterungen über die Mechanik und mathematische Physik in Frankreich in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts. Das 5. Kapitel ist der Mechanik und mathematischen Physik in Deutschland und England bis etwa 1880 gewidmet und der ganze 2. Band ist eine Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der Relativitätstheorie (wobei die allgemeine Relativitätstheorie allerdings fehlt). Im einzelnen findet man eine Fülle interessanter Bemerkungen, auf die wir hier leider nur im allgemeinen hinweisen können. Referent teilt die Überzeugung der Herausgeber, daß diese Vorlesungen „sicherlich auf alle Mathematiker und Physiker und weit über diesen Kreis hinaus, eine große Wirkung ausüben" werden.

Haupt.

L. Heffter u. C. Koehler, Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Bd. Zweite wesentlich umgearbeitete und vermehrte Auflage. Gr. 8°. XV u. 477 S. Mit 112 Fig. im Text. Karlsruhe, G. Braun. 1927. Brosch. M. 20.—.

Das bekannte Lehrbuch ist gekennzeichnet durch systematische Benutzung des Begriffes der Transformationsgruppe. Dementsprechend wird mit der „projektiven" Geometrie begonnen, d. h. mit dem Studium derjenigen Eigenschaften geometrischer Gebilde, die bei projektiven Verwandlungen (Transformationen) erhalten (invariant) bleiben. Sodann wird zur „affinen" Geometrie aufgestiegen, die sich kurz dahin kennzeichnen läßt, daß bei ihr, spezieller, nur solche projektive Transformationen in Betracht gezogen werden, welche parallele Gerade wieder in parallele Gerade überführen (d. h. bei welchen die „unendlich ferne" Gerade in sich übergeführt wird). Schließlich gelangt man zur gewöhnlichen Geometrie, bei welcher — noch spezieller — als Transformationen nur die Bewegungen (im gewöhnlichen Sinne) zugelassen werden. Angesichts der Tatsache, daß die Relativitätstheorie durchaus vom Begriff der Transformationsgruppe und der Invariante beherrscht wird, erscheint die Kenntnis eines solchen Aufbaues der analytischen Geometrie, bei dem übrigens auch die nichteuklidische Geometrie ihren Platz findet, für den mathematischen Physiker interessant. Das ausgezeichnete Werk ist für solche Leser um so eher geeignet, als es sehr klar geschrieben ist und gerade auch auf denjenigen Rücksicht nimmt, der in diese Betrachtungen erst eingeführt werden will. Die vorliegende Neuauflage des 1. Bandes unterscheidet sich von der ersten vor allem dadurch, daß die Darstellung von vornherein axiomatisch fundiert ist. Behandelt wird, abgesehen von den Grundlagen, vor allem die ebene Geometrie, während die Raumgeometrie dem 2. Bande (Leipzig 1923) vorbehalten ist.

Haupt.

R. Lehnhardt, Der Detektor und seine Anwendung für Empfang, Verstärkung und Erzeugung elektrischer Wellen. (Die Hochfrequenz-Technik, Bd. 8.) 1. Aufl. Gr. 8°. VI u. 95 S. Mit 62 Fig. Berlin, H. Meusser. 1926. M. 5.80.

Das Bändchen behandelt die Mittel zur Wahrnehmbarmachung der elektromagnetischen Schwingungen. Nach einem Überblick über die geschichtliche Entwicklung der verschiedenen Detektoren, kurzer Erläuterung und Würdigung von Prinzip, Wirkungsweise und Ausführung — von der H. Hertzschen Funkenstrecke bis zu den Elektronenröhren — werden eingehend die Kontaktdetektoren behandelt. Der Angabe der zu Detektorzwecken verwendbaren Stoffe und ihrer Eigenschaften (Empfindlichkeit, Zusammenhang mit physikalischen Eigenschaften u. a.) schließt sich ausführliche Behandlung und kritische Würdigung der Theorien an. Künstliche Kristalle, die zweckmäßigsten Formen leiten über zu Detektorschaltungen mit Hinweisen auf ihre Eigenart gegenüber Röhrenschaltungen. Der letzte Abschnitt ist dem Prinzip und Wirkungsweise des Schwingkristalls gewidmet. Literaturübersicht und Namen- und Stichwörterverzeichnis beschließen das Bändchen, das in leicht verständlicher Weise auch dem Laien einen Einblick in die teilweise noch ungeklärten Verhältnisse bietet.

Decker.

C. Lübben, Die Antenne und ihre Verwendung in der Radiotechnik. (Die Hochfrequenz-Technik, Bd. 9.) 1. Aufl. Gr. 8°. V. u. 76 S. Mit 69 Fig. Berlin, H. Meusser. 1926. M. 4.80.

Das Bändchen bietet eine übersichtliche Darstellung der für Antennen, wie sie speziell für Rundfunk- und Kurzwellenempfang in Betracht kommen, maßgebenden Punkte. Nach einleitender Behandlung der Aufgabe der Antenne für Sende- und Empfangszwecke, der Antenne als Schwingungskreis und der Bedeutung der Abstimmung wird ausführlich auf Form, Größe und die die Wirkung herabsetzenden Faktoren eingegangen. Die gebräuchlichsten Antennenformen (Hoch-, Zimmer-, Behelfsantennen) werden hinsichtlich Eigenwelle, wirksame Höhe, günstigster Wirkungsbereich kritisch besprochen. Auf Befestigung, Einführung, Erdung und Blitzschutz wird hingewiesen. Die Richtantennen, vor allem die Rahmenantenne, werden an Hand mehrerer Schaltschemen (mit Angabe der elektrischen Größen) behandelt. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Formeln zur Bestimmung der Antennenkonstanten, ein umfangreiches Literatur- und Stichwörterverzeichnis beschließen die Ausführungen, die ohne reine Theorie gerade dem Laien wissenswerten Aufschluß zu geben berufen erscheinen. Decker.

M. Singelmann, Störbefreiung in der drahtlosen Nachrichtenübermittlung. (Die Hochfrequenz-Technik, Bd. 7.) 1. Aufl. Gr. 8°. X u. 151 S. Mit 239 Fig. Berlin, H. Meusser. 1926. M. 8.50.

Das Bändchen bietet in gedrängter, aber doch erschöpfender Weise eine Übersicht über die Mittel zur Störbefreiung. Nach einleitender Besprechung des Wesens der Störungen im allgemeinen werden Dämpfungsverminderung, Filterkreise, Kettenleiter, sowie Hochfrequenzverstärker und Überlagerungsempfänger behandelt. Den für Richtempfang geltenden Antennenanordnungen schließt sich die Erörterung einiger besonderer Probleme — künstliche Dämpfung, Amplitudenbegrenzung, Kompensationsschaltungen — sowie eine kurze Behandlung der piëzoelektrischen Resonanz an. Zum Schluß des Hauptteils wird noch auf die Verzerrungsbeseitigung durch Gegentakt-Niederfrequenzverstärker und stereoakustisches Hören hingewiesen. Die Bewältigung des umfangreichen Stoffes, sowie Verständnis und Beurteilung der zahlreichen Schaltbilder wird durch eine kurzgefaßte Darlegung der in den einzelnen Abschnitten behandelten Fragen und Erläuterungen bei den Schaltskizzen selbst erleichtert. Eine kurze Übersicht über praktische Ausführung (Gerätebau), hauptsächlich hinsichtlich Spulen, beschließt das Bändchen, das, mit einem ausführlichen Literaturverzeichnis versehen, einen Einblick in die Mittel zur Störbefreiung und Anregung zu Untersuchungen bietet. Decker.

J. M. Kolthoff, Die Maßanalyse. Erster Teil: Die theoretischen Grundlagen der Maßanalyse 8°. XII u. 254 S. Mit 20 Abb. Berlin, J. Springer. 1927. M. 10.50, geb. M. 11.70.

Die Erwähnung dieses Büchleins in der „Physikalischen Zeitschrift" rechtfertigt sich dadurch, daß es (wenigstens der vorliegende erste, theoretische Teil) kein Laboratoriumsbuch für den Chemiker allein ist, sondern ein vom Standpunkt der theoretischen und physikalischen Chemie aus äußerst interessantes Werkchen. Die physikalisch-chemischen Grundlagen der gesamten Maßanalyse, also Massenwirkungsgesetz, Indikatorentheorie, Potentialtheorie, Reaktionsinduktion, Kinetik, Katalyse, Adsorption, Fehlerrechnung usw., werden hier in mustergültiger Weise auf ein in den meisten einschlägigen Büchern in dieser Richtung stiefmütterlich behandeltes Gebiet exemplifiziert, von dem Gedanken ausgehend, daß dies Vorgehen nicht nur alte Methoden verstehen, sondern auch neue finden lehrt.

G.-M. Schwab.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Frankfurt a. M. Dr. Eberhard Mauz für Physik, an der Universität Münster Dr. Wolfgang Langenbeck für Chemie, an der Universität Hamburg Dr. Gerhard Thomsen für Mathematik.

Ernannt: Der Abteilungsvorsteher am Kaiser-Wilhelm-Institut für Kohlenforschung in Mülheim Dr. H. Tropsch zum Leiter des Kohlenforschungsinstitutes in Prag, der Observator an der Sternwarte Hamburg-Bergedorf Professor Dr. Kasimir Romuald Graff zum ord. Professor der Astronomie an der Universität Wien und Direktor der Sternwarte daselbst, der Privatdozent an der Bergakademie Freiberg Dr. H. J. Steinbrecher zum a. o. Professor der organisch-chemischen Technologie ebenda.

Gestorben: Der ord. Professor für Chemische Technologie an der Montanistischen Hochschule in Berlin Dr. Ing. Hans Fleissner, der frühere Herausgeber des Journal of the American Chemical Society Professor Abram Adam Breneman, der frühere Professor der Chemie an der Universität von Pennsylvanien Dr. Edgar F. Smith.

Gesuche.

Zur Leitung unserer Abteilung

Quecksilber-Gleichrichter

suchen wir einen Herrn mit entsprechenden Kenntnissen und Erfahrungen.

Ausführl. Bewerbungen mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Gehaltsansprüchen, Angabe des frühesten Eintrittstermins zu richten unter Kennwort „Gleichrichter" an das Personalbüro der

Bergmann-Elektricitäts-Werke A.-G., Berlin N 65

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.